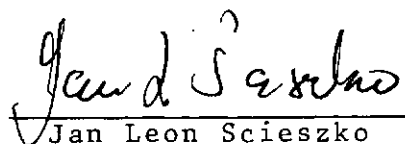


INFLUÊNCIA DA ROTAÇÃO NO COMPORTAMENTO
DINÂMICO DE ROTORES FLEXÍVEIS

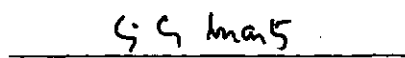
Adhemar Castilho

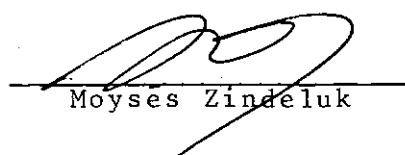
TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS
DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO
DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTEN-
ÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.).

Aprovada por:


Jan Leon Scieszko
(Presidente)


Victor Prodonoff


Luiz Carlos Martins


Moyes Zindeluk

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL
NOVEMBRO DE 1983

CASTILHO, ADHEMAR

Influência da rotação no comportamento dinâmico de rotores flexíveis. Rio de Janeiro, UFRJ/COPPE, 1983.

ix , 110 p. 29,7 cm (COPPE-UFRJ, M.Sc., Engenharia Mecânica, 1983).

Tese - Univ. Fed. Rio de Janeiro. COPPE.

I - Rotodinâmica I. COPPE/UFRJ II. Título (série).

AGRADECIMENTOS

Desejo agradecer:

- A todos aqueles que contribuíram de alguma forma para a execução deste trabalho;
- Aos Engenheiros Reinaldo de Falco e Irineu Soares pelo apoio dado;
- Ao meu orientador, Professor Jan Leon Scieszko pela forma eficiente com que conduziu sua tarefa, dando as diretrizes para que idéias abstratas e desordenadas se convertessem neste trabalho;
- Ao amigo Victor Prodonoff pela forma obstinada com que se empenhou, junto ao autor, em propiciar os meios que permitiram a concretização desta tese;
- Ao amigo e incentivador Sérgio O.M.Portinho por ter criado e sustentado o espaço dentro do qual se desenrolou esta tarefa.

Quero ainda fazer referência a um grande Rotor que é nosso velho conhecido. Não foi projetado por nenhum homem, mas já vem operando há muitos anos, sem jamais ter necessitado de qualquer manutenção ou reparo. Sua precisão em muito excede a dos melhores relógios suíços.

O Rotor referido é o Planeta Terra e é sobre ele que temos desenvolvido as nossas atividades vitais, dentro do mais perfeito sincronismo, sem que nenhuma de suas leis tenha sido quebrada ou sequer tenhamos ofuscado o brilho de sua sublime harmonia. Ao contrário, sua beleza se renova dia após dia, não obstante os pesados esforços que o homem vem desenvol

vendo no sentido de sua destruição.

Faço uso desta breve reflexão para sugerir ao caro leitor uma pequena meditação acerca da existência de uma inteligência superior, capaz de criar leis infinitamente grandiosas, que transcendem em muito a percepção do homem, o qual, por vezes, se julga maior do que DEUS.

É nesse espírito que dedico este trabalho a este SER SUPREMO, por ter concedido a mim a honra de conhecer um pouco mais de sua majestosa criação.

Ao SENHOR DEUS seja dada toda honra e toda a glória.

Neste instante faço minhas as palavras do Rei Davi, encontradas no Salmo oitavo das Sagradas Escrituras.

"Ó Senhor, Senhor nosso,
quão magnífico em toda a terra
é o teu nome!
pois expuseste nos céus a tua
majestade.
Da boca de pequeninos e crianças
de peito
suscitaste força, por causa dos teus
adversários,
para fazeres emudecer o inimigo e
o vingador.
Quando contemplo os teus céus,
obra dos teus dedos,
e a lua e as estrelas que estabeleceste,
que é o homem, que dele te lembres?
e o filho do homem, que o
visites?

Fizeste-o, no entanto, por um pouco,
menor do que Deus,
e de glória e de honra o coroaste
Deste-lhe domínio sobre as obras
da tua mão,
e sob seus pés tudo lhe puseste:
ovelhas e bois, todos,
e também os animais do campo;
as aves do céu e os peixes do mar,
e tudo o que percorre as sendas dos
mares.
Ó Senhor, Senhor nosso,
quão magnífico em toda a terra é o
teu nome!"

O autor

RESUMO

A finalidade deste trabalho é mostrar a variação das frequências naturais de um rotor flexível, em função da velocidade de rotação do mesmo. Dá-se ênfase ao papel de sempenhado pela inércia de rotação e pelo efeito giroscópico.

Inicialmente faz-se uma análise de um modelo simplificado, com dois graus de liberdade. Apresenta-se, em seguida, um modelo contínuo, simulando o comportamento de um rotor em balanço, através de uma equação diferencial. O disco, na extremidade, é introduzido nas condições de contorno.

Um terceiro modelo, contínuo e biapoiado, considera o disco na própria equação diferencial do rotor, simulando seus efeitos de inércia de rotação e efeito giroscópico.

Exemplos numéricos comprovam a viabilidade do método, fazendo-se ainda comparações entre os dois primeiros modelos.

ABSTRACT

The purpose of this work is to show the dependence of the natural frequencies of a flexible rotor on its speed of rotation. Emphasis is given to the rotatory inertia and the giroscopic moment.

A simplified analysis is first made of a model with two degrees of freedom. Then, a continuous cantilevered system is simulated through a differential equation. The disc is considered as a boundary condition.

Finally a last continuous model considers the disc in the differential equation, with its inertial and giroscopic effects.

Numerical examples show the validity of the method, comparing the discrete and continuous models.

ÍNDICE

I	- INTRODUÇÃO	1
II	- CINEMÁTICA DE UM DISCO ROTATIVO	7
	2.1 - PRECESSÃO E ROTAÇÃO	7
	2.2 - FREQUÊNCIA NATURAL E VELOCIDADE CRÍTICA	9
	2.3 - COORDENADAS GLOBAIS DE UM VOLANTE	9
	2.4 - ORIENTAÇÃO ANGULAR DE UM VOLANTE EM TERMOS DA ELÁSTICA DO EIXO	11
	2.5 - VELOCIDADES E ACELERAÇÕES ANGULARES DO DISCO ..	14
III	- FREQUÊNCIAS NATURAIS DE UM ROTOR EM BALANÇO, COM SUS PENSÃO ELÁSTICA - SISTEMA DISCRETO	19
	3.1 - EQUAÇÕES BÁSICAS DE EQUILÍBRIO DINÂMICO DO ROTOR	19
	3.2 - EQUAÇÃO DE FREQUÊNCIA	24
	3.3 - ANÁLISE DAS CURVAS DE FREQUÊNCIA	26
IV	- FREQUÊNCIAS E MODOS NATURAIS DE UM ROTOR EM BALANÇO, COM SUSPENSÃO ELÁSTICA - SISTEMA CONTÍNUO	31
	4.1 - EQUAÇÃO DIFERENCIAL DO MOVIMENTO	32
	4.2 - CARACTERIZAÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO	42
	4.3 - SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE MOVIMENTO ..	46
V	- FREQUÊNCIAS E MODOS NATURAIS DE VIBRAÇÃO DE UM ROTOR BIAPOIADO, COM DISCO INTERMEDIÁRIO - SISTEMA CONTÍNUO..	57
	5.1 - EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE MOVIMENTO	57
	5.2 - CONDIÇÕES DE CONTORNO	61
	5.3 - SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE MOVIMENTO ..	61
VI	- EXEMPLOS NUMÉRICOS DOS TRÊS MODELOS E COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS OBTIDOS NO 1º E 2º MODELOS	71
	6.1 - INFLUÊNCIA DA VARIAÇÃO DE DIVERSOS PARÂMETROS FÍSICOS E GEOMÉTRICOS NA FREQUÊNCIA NATURAL - MODELO DISCRETO	71

6.2 - COMPARAÇÃO ENTRE OS RESULTADOS DOS MODELOS CONTÍNUO E DISCRETO	78
6.3 - INFLUÊNCIA DA VARIAÇÃO DOS PARÂMETROS GEO- MÉTRICOS NAS CURVAS DE FREQUÊNCIA NATURAL DE UM ROTOR EM BALANÇO - MODELO CONTÍNUO	82
6.4 - INFLUÊNCIA DA VARIAÇÃO DOS PARÂMETROS GEO- MÉTRICOS NAS CURVAS DE FREQUÊNCIA NATURAL DE UM ROTOR BIAPOIADO - MODELO CONTÍNUO	92
VII - CONCLUSÃO	100
VIII - BIBLIOGRAFIA	102
APÊNDICE A - PROPRIEDADES DAS FUNÇÕES PULSO UNITÁRIO E BINÁRIO UNITÁRIO	105
APÊNDICE B - TRANSFORMADAS DE LAPLACE USADAS NA SOLUÇÃO DA ELÁSTICA DO ROTOR	109

I - INTRODUÇÃO

Denominam-se rotores aos componentes das máquinas (e equipamentos) constituídos por um eixo rotativo sobre o qual são montados discos. Como exemplo podemos citar os conjuntos: eixo-impelidor de uma bomba centrífuga, ou compressor centrífugo, eixo-disco-palhetas de uma turbina a gás ... Assim, os rotores são componentes vitais de máquinas que desempenham papel preponderante no desenvolvimento da economia, tais como: as turbinas a gás, nos transportes; compressores centrífugos na indústria química e do petróleo; sopradores, na indústria siderúrgica e turbinas a vapor, na geração de energia termo elétrica.

O comportamento dinâmico dos rotores tem sido motivo de atenção crescente, pelo fato de estarem sendo fabricados cada vez mais leves e com velocidades maiores. A determinação das frequências e modos naturais de vibração de rotores flexíveis (solução do movimento não excitado) está, portanto, a exigir simulação matemática que acompanhe o grau de sofisticação do seu desempenho. Devido ao alto custo das máquinas que os contêm, a análise dinâmica criteriosa se faz necessária na fase de projeto, com vistas a minimização dos riscos de investimentos dos fabricantes.

Apresentaremos, a seguir, um breve panorama histórico do desenvolvimento deste assunto.

O primeiro trabalho em Rotodinâmica remonta a mais de um século, sendo apresentado por Rankine [1]. Em 1894, Rayleigh [2] apresentou um método aproximado para o cálculo das frequências naturais de vigas. Este conceito foi implementado

por Timoshenko [3], em 1916, que introduziu o efeito do cizalhamento transversal nas frequências naturais. Jeffcot [4] é o primeiro a apresentar o conceito de movimento de precessão do eixo ("Whirl") tal como é conhecido hoje. No seu trabalho, o equacionamento da elástica deformada é definido em termos de forças ortogonais que agem sobre o eixo como forças de inércia, de resistência elástica à deformação, de desbalanceamento etc.... Importante conclusão foi obtida por Southwell e Gough [5], que verificaram a diminuição das frequências naturais do rotor com a aplicação do torque e empuxo axial constantes. A fase seguinte foi caracterizada pelo grande desenvolvimento numérico: Holzer [6] desenvolve uma técnica numérica para solução do problema de vibração torcional; Stodola [7] apresenta uma técnica iterativa que converge rapidamente para as frequências naturais, base dos atuais métodos matriciais; Myklestad e Prohl [8] estende o método de Holzer às vigas e eixos rotativos, valendo-se do grande auxílio do computador digital. A influência do efeito giroscópico nas frequências naturais de rotores com grandes discos é introduzida por Smith [9] e posteriormente estendida a sistemas com massas concentradas por Green [10]. Em nova fase de desenvolvimento dos rotores, entra em cena a influência da flexibilidade dos suportes: a resposta dinâmica lateral de vigas sobre suportes flexíveis e amortecidos, sujeitas a solicitações harmônicas, encontra em Miller [11] o seu pioneiro, o qual obtem a solução de regime pela extensão do método de Holzer-Myklestad-Prohl (HMP). A combinação de massas distribuídas e concentradas é aplicada por Urban [12] pela primeira vez. Mancais não lineares são considerados por Tondl [13] e Billet [14]. Em 1967, a resposta dinâmica proveniente do desbalanceamento é mos-

trada por Lund e Orcutt [15]. Com Eshleman e Eubanks [16] são combinadas causas básicas de influência na dinâmica de rotores, tais como: torque axial, momento giroscópico, inércia de rotação e cisalhamento transversal. Usando a técnica de elementos finitos, Raul [17], investiga a resposta dinâmica devido ao desbalanceamento, utilizando análise matricial.

Um equipamento rotativo típico é constituído de vários componentes, tais como: eixo, discos, mancais de suporte, carcaça, fundação. Quando submetidos a distúrbios internos ou externos (forças e/ou deslocamentos), estes componentes absorvem e dissipam energia. No rotor, a influência destes distúrbios se traduz em uma configuração de deslocamentos (curva elástica), denominada de resposta dinâmica, a qual tem grande importância no projeto de máquinas, uma vez que determina as tensões atuantes no rotor. A obtenção desta resposta tem sido facilitada ultimamente pelo uso do computador, que tem possibilitado o incremento da simulação de rotores reais.

O objetivo do presente estudo é a determinação analítica da influência da rotação do eixo nas frequências e modos naturais de vibração de um rotor flexível. Como consequência pretende-se a aquisição de conhecimentos teóricos e o desenvolvimento de sentimento físico no comportamento dinâmico de rotores submetidos a altas velocidades de rotação.

No desenvolvimento do trabalho será apresentada também a influência de vários parâmetros físicos e geométricos no comportamento do rotor, tais como as molas de suspensão, comprimento e diâmetro do eixo, inércia dos discos, etc. Como produto final teremos programas de computador capazes de simular os rotores reais segundo diferentes graus de simplificação ma-

temática.

Para atingir os objetivos descritos acima, são desenvolvidos e analisados três modelos físicos diferentes mostrados nas Figuras 1, 2 e 3, apresentados em ordem crescente de dificuldades.

O primeiro modelo, Figura 1, é analisado no Capítulo III. Apresenta uma abordagem simplificada, onde o modelo real é simulado por um modelo matemático discretizado, com apenas dois graus de liberdade, conforme apresentado por Thomson [18], em 1977. O eixo possui elasticidade distribuída, sendo a massa e o momento de inércia de massa concentrados na extremidade do rotor. A simulação é feita pela aplicação das leis de Newton ao volante colocado na extremidade do rotor, submetido as forças elásticas de reação do eixo e as forças de inércia que agem no disco. As frequências naturais ficam caracterizadas pelo conjunto de pontos $\Omega \times \omega$ (rotação x precessão) que satisfazem à equação algébrica do 4º grau em relação a ω .

O segundo modelo, Figura 2, analisado no Capítulo IV estuda o mesmo problema físico apresentado no Capítulo III, só que agora o eixo possui massa distribuída, o que não ocorria no modelo anterior. Determina-se a equação diferencial de movimento, de um trecho infinitesimal do eixo, sendo que o disco é introduzido nas condições de contorno. A solução da equação diferencial conduz a um problema de auto-valores, do qual se obtém curvas $\omega = f(\Omega)$, (rotação x precessão).

O terceiro e último modelo, Figura 3, cuja análise se encontra no Capítulo V, introduz um disco na expressão da equação diferencial de movimento. O rotor é considerado bi-

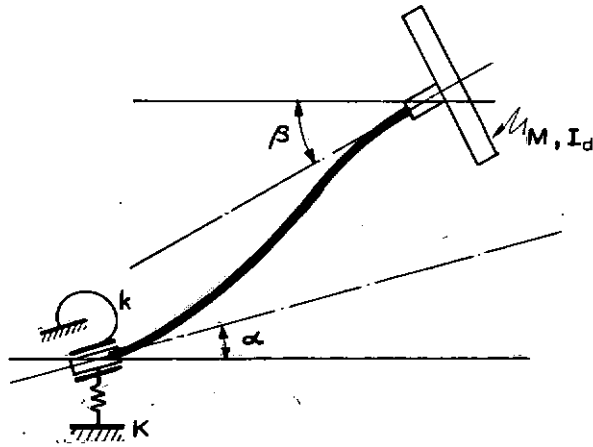


FIG. 1 - MODELO DISCRETO, EM BALANÇO, COM 2 GRAUS DE LIBERDADE.

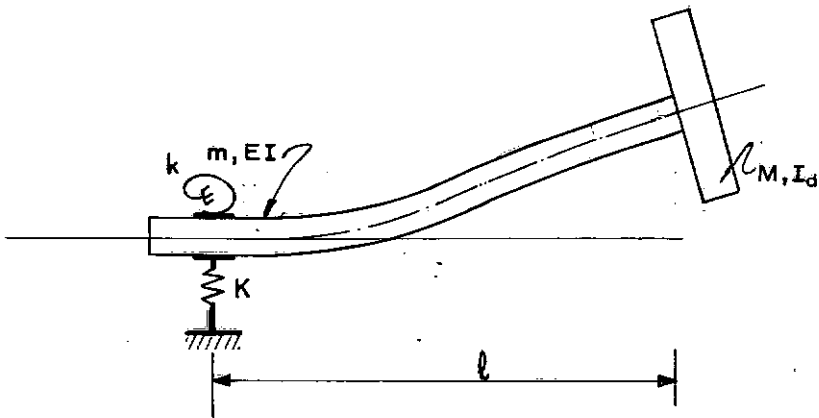


FIG. 2 - MODELO CONTÍNUO EM BALANÇO.

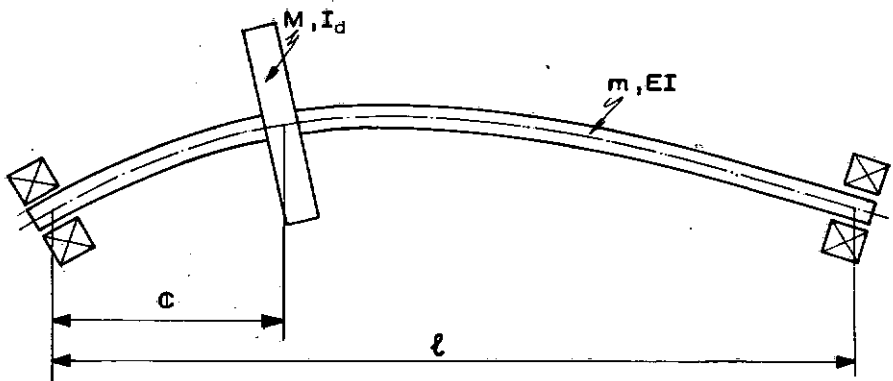


FIG. 3 - MODELO CONTÍNUO BIAPOIADO.

apoiado, ou seja, deslocamentos e momentos fletores nulos nas extremidades. Ainda neste caso estaremos preocupados com a de terminação da curva elástica do eixo, obtida através da solu- ção do problema de auto-valores. A grande vantagem deste mode lo consiste na sua melhor semelhança com os rotores reais, podendo-se incluir outros discos sem maiores dificuldades.

No Capítulo seguinte são apresentados alguns exem plos numéricos, que mostram a validade do método. São ainda comparados os resultados do 1º e do 2º modelos o que permite a visualização da influência exercida pela massa do eixo.

II - CINEMÁTICA DE UM DISCO ROTATIVO

No presente capítulo serão apresentadas as expressões das componentes da velocidade e aceleração angular de um disco rotativo.

Estas expressões serão usadas posteriormente na caracterização do comportamento dinâmico de um disco de grande massa ou de um elemento de comprimento infinitesimal do eixo.

2.1 - PRECESSÃO E ROTAÇÃO

Imaginemos inicialmente um rotor em balanço, do tado dos movimentos angulares $\bar{\omega}$ e $\bar{\Omega}$ conforme indicado na Figura (4). Tais movimentos podem ser originados, por exemplo, pelo desbalanceamento.

O primeiro movimento angular $\bar{\omega}$, denominado de precessão ("whirl"), é um movimento orbital que fica integralmente definido como: a velocidade angular de um plano definido pela linha dos mancais LM e o centro de gravidade do disco (G), girando em torno de LM.

O segundo movimento angular $\bar{\Omega}$, denominado de rotação ("spin"), é a velocidade angular com que o eixo gira em torno de sua linha de centros (LC). Dada a necessidade de caracterizá-lo rigorosamente, podemos defini-lo, tendo ainda em vista a Figura (4), como a velocidade angular relativa do disco, em relação ao sistema móvel $x y z$, descrito mais à frente.

Na prática, pode ocorrer que as velocidades angulares descritas acima, sejam iguais ou não. Sendo iguais estaremos em presença de precessão síncrona. Em caso contrário, precessão assíncrona.

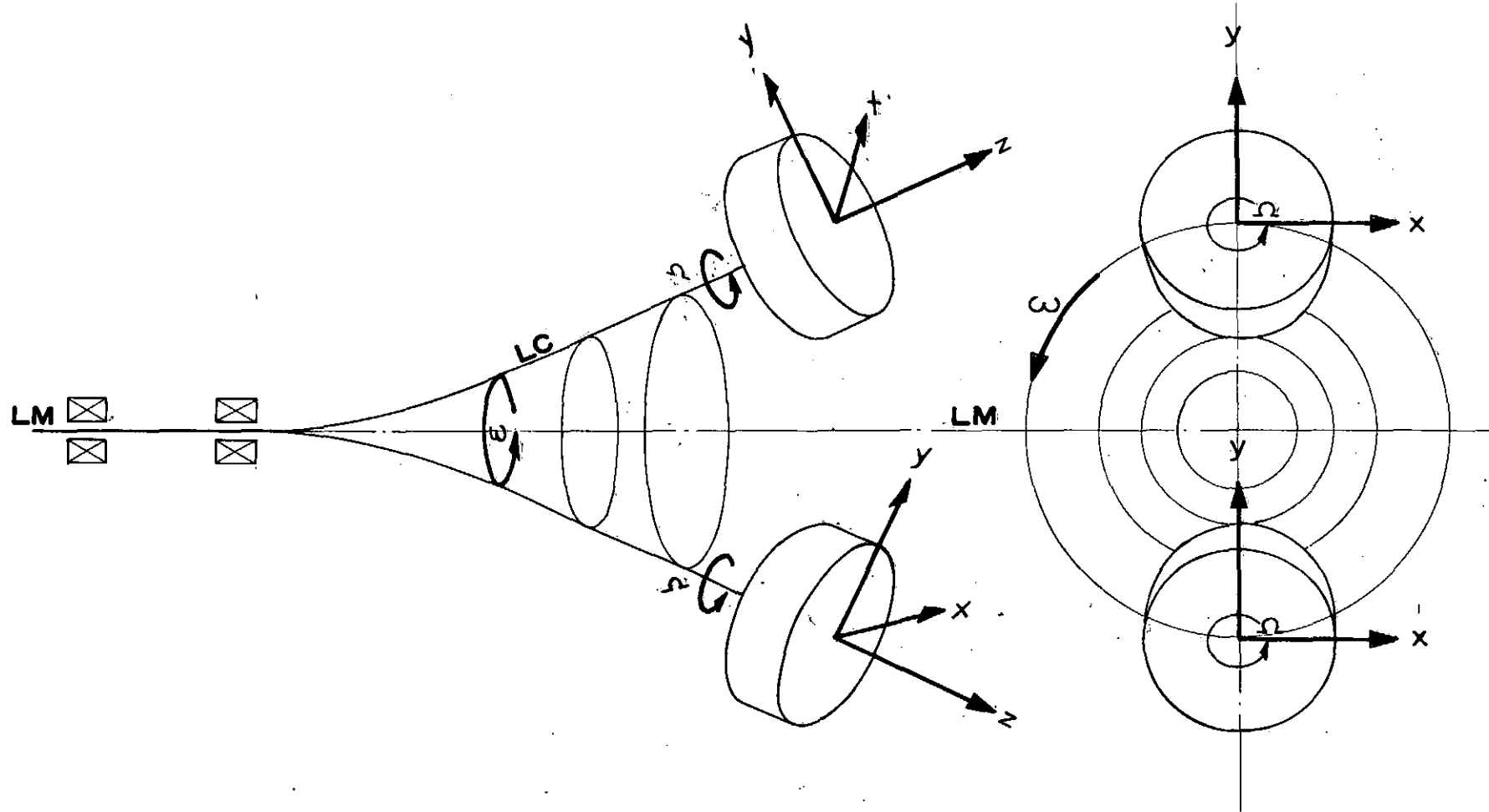


FIG. 4 — MOVIMENTOS ANGULARES DE UM ROTOR.

Ω — ROTAÇÃO

ω — PRECESSÃO

2.2 - FREQUÊNCIA NATURAL E VELOCIDADE CRÍTICA

Nos diversos modelos apresentados neste estudo, o termo frequência natural se refere à velocidade angular de precessão ω , na qual o rotor se mantém em oscilação harmônica. O movimento se processa unicamente sob a ação das forças e torques de inércia e forças elásticas de restauração, sem nenhuma ação de forças externas perturbadoras do equilíbrio, como o caso do desbalanceamento. Será mostrado nos capítulos subsequentes que a frequência natural depende da rotação Ω do eixo, sendo, portanto, $\omega = f(\Omega)$.

Historicamente, o termo velocidade crítica tem sido usado para definir aquelas velocidades de rotação nas quais se desenvolvem grandes deflexões no eixo. Tal definição, no entanto, não é precisa pois não caracteriza velocidades bem definidas. Velocidade crítica será aqui definida como aquela frequência natural em que a rotação Ω coincide com a precessão síncrona.

2.3 - COORDENADAS GLOBAIS DE UM VOLANTE

Para descrever a posição de um volante no espaço, faremos uso de dois sistemas de coordenadas, um fixo e um móvel. Seja XYZ um sistema fixo, global de coordenadas. Para o nosso rotor flexível, a origem deste sistema estará normalmente fixada a um mancal. O eixo Z é coincidente com a linha de centro dos mancais, e o eixo Y normalmente vertical enquanto o eixo X completa o triedro direto Figura (5).

O sistema móvel $x y z$ tem as seguintes características:

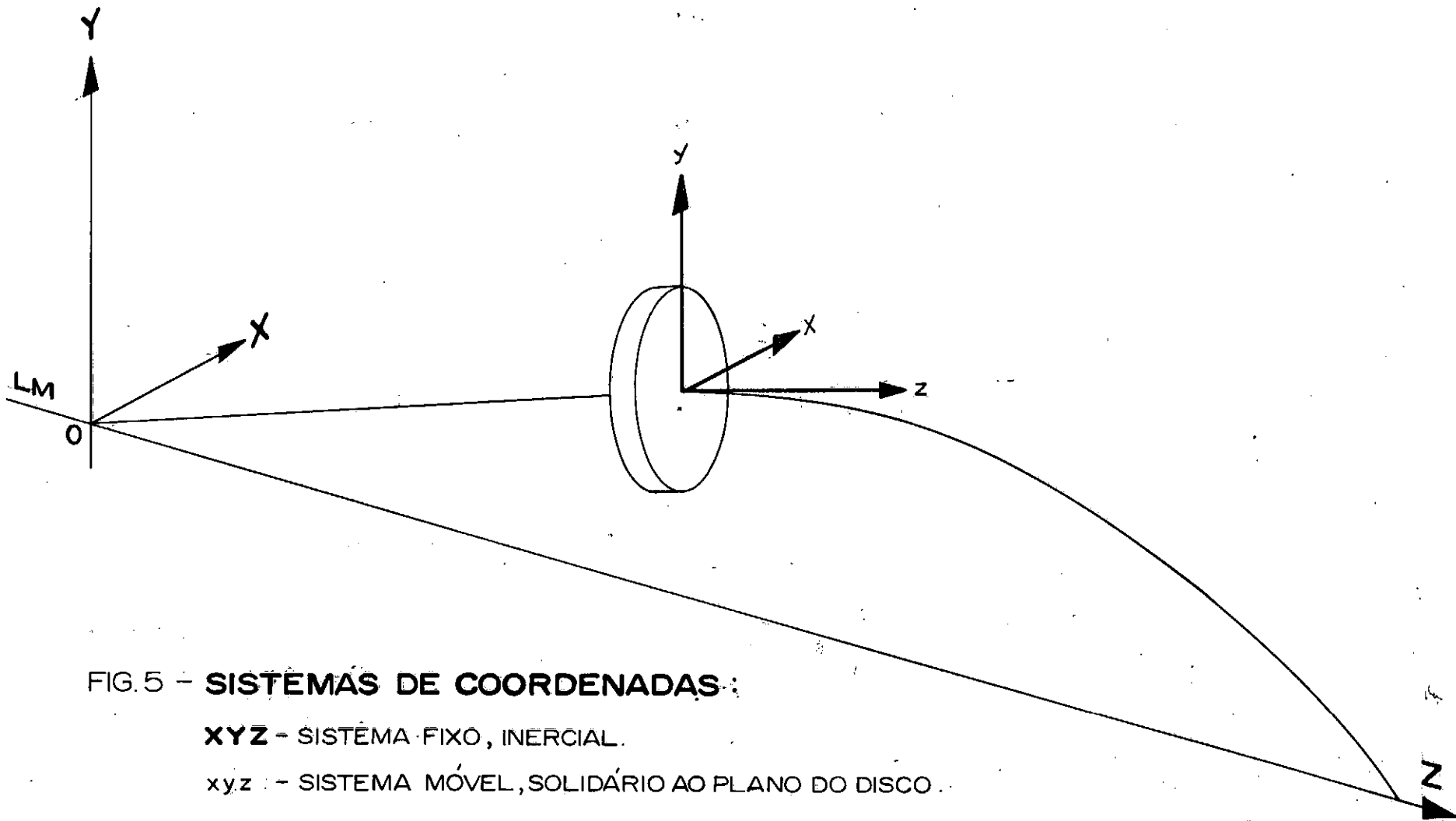


FIG.5 - **SISTEMAS DE COORDENADAS:**

XYZ - SISTEMA FIXO, INERCIAL.

xyz - SISTEMA MÓVEL, SOLIDÁRIO AO PLANO DO DISCO.

- a) a origem pertence ao centro de gravidade do volante;
- b) o eixo z é tangente à elástica do eixo flexível do rotor;
- c) o plano $x y$ coincide com o plano do disco, sendo que, na posição de repouso, x é paralelo a X , e y paralelo a Y .

Da definição acima, vê-se que o sistema $x y z$ possui todos os movimentos angulares do disco, a menos da rotação (Ω) em torno do eixo z . Em outras palavras, possui os movimentos de um disco montado em uma viga, com a mesma geometria que o rotor.

A posição genérica do disco no espaço, considerado como corpo rígido, envolve três coordenadas cartesianas do centro de massa (X, Y, Z) e três coordenadas generalizadas de ângulos de orientação do volante em relação ao seu CG, definidas pelos ângulos de Euler (ψ, θ, ϕ). Embora no caso geral sejam necessários 6 coordenadas, esta formulação usará apenas 4 (X, Y, θ, ϕ), assumindo as simplificações seguintes:

- a) o centro de massa se desloca em um plano paralelo a $X Y$, não variando a coordenada Z ;
- b) devido à simetria radial do disco, não há necessidade de indicar a posição específica de um raio geométrico do mesmo.

A primeira destas simplificações é perfeitamente válida para o caso de pequenas deformações do eixo. A segunda indica ser a orientação do volante a mesma do sistema móvel $x y z$, que estará permanentemente coincidindo com os eixos principais de inércia do volante.

2.4 - ORIENTAÇÃO ANGULAR DO VOLANTE EM TERMOS DA ELÁSTICA DO EIXO

Foi mostrado acima que a posição angular do volante pode ser descrita como sendo idêntica à posição do refe-

rencial móvel $x y z$.

Tomando, inicialmente, um sistema $x_0 y_0 z_0$, paralelo a $X Y Z$, e procedendo-se três rotações de seus eixos, podemos fazê-lo coincidir com uma posição qualquer genérica de $x y z$. As três rotações referidas são definidas a seguir com a ajuda da Figura (6).

- 1) Rotação do ângulo ψ em torno do eixo z_0 , produzindo o sistema $x' y' z'$. (nesse problema $\psi = 0$ e $x' y' z' \equiv x_0 y_0 z_0$).
- 2) Rotação do ângulo θ em torno de $y' \equiv y_0$ produzindo $x'' y'' z''$.
- 3) Rotação do ângulo ϕ em torno de x'' , produzindo finalmente o sistema $x y z$.

Usando as funções descritivas da linha elástica do eixo do rotor, $Y = Y(Z, t)$ e $X = X(Z, t)$ e os ângulos ψ, θ e ϕ como definidos acima, podemos dizer que, para pequenas deformações:

$$\dot{\psi} = 0 \quad (1)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial \dot{X}(Z, t)}{\partial Z} \quad (2)$$

$$\ddot{\phi} \approx - \frac{\partial \dot{Y}(Z, t)}{\partial Z} \quad (3)$$

A última expressão (3), é aproximada e já leva em conta que o eixo sofre pequenas deformações [19].

Cada seção do eixo, ou do volante, pode ser definida no espaço pelas quatro coordenadas: $X(Z, t)$, $Y(Z, t)$, $\theta = \frac{\partial X(Z, t)}{\partial Z}$ e $\phi \approx - \frac{\partial Y(Z, t)}{\partial Z}$, sendo funções da distância Z à extremidade do eixo, e do tempo t .

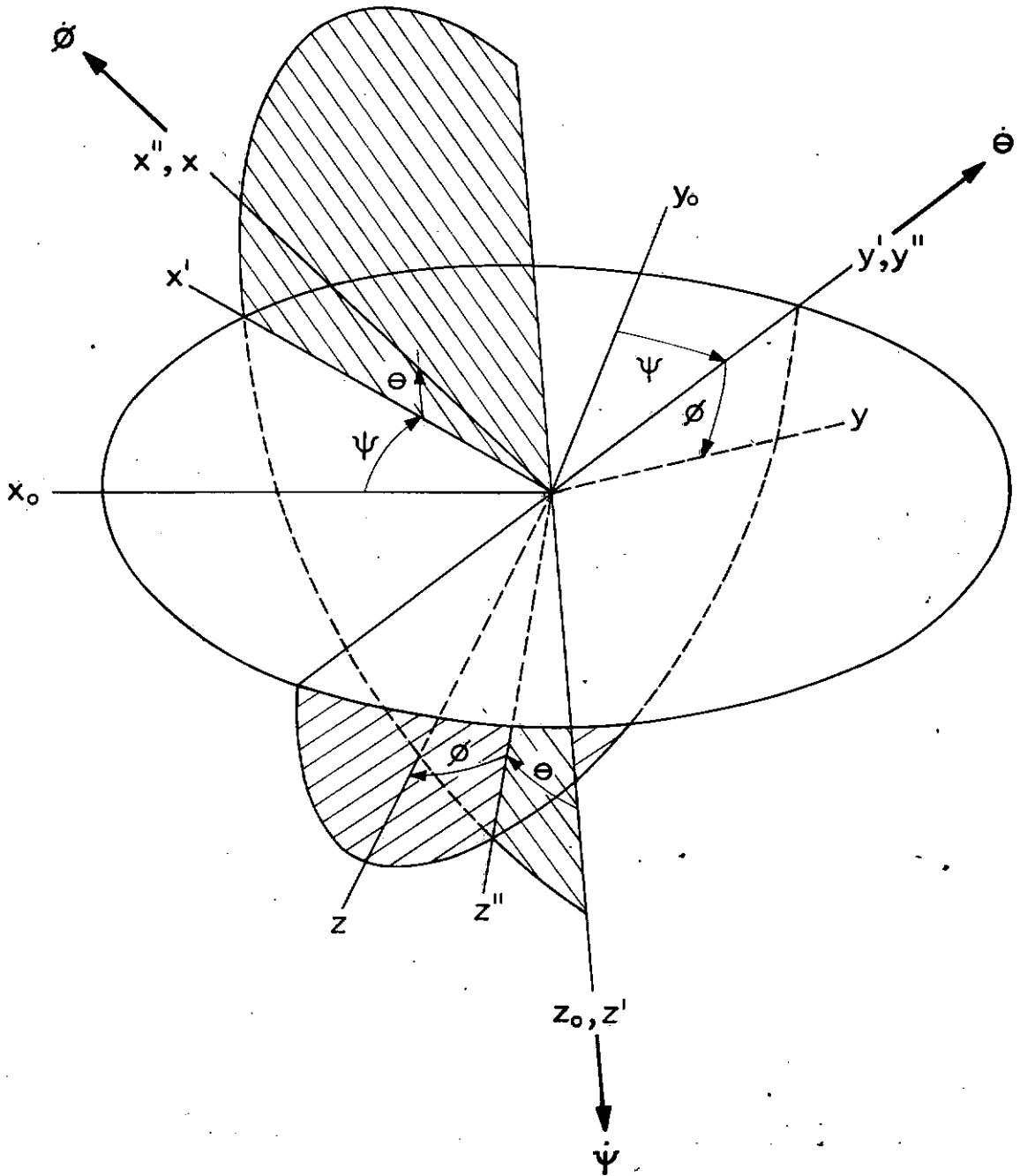


FIG. 6 - ÂNGULOS DE EULER.

2.5 - VELOCIDADES E ACELERAÇÕES ANGULARES DO DISCO

A velocidade angular absoluta do referencial móvel $x y z$ pode ser escrita como:

$$\bar{\omega} = \bar{\psi} + \bar{\theta} + \bar{\phi} \quad (4)$$

Usando as equações (1), (2) e (3) no domínio das pequenas deformações, fica-se com a seguinte expressão para a velocidade angular do sistema móvel

$$\bar{\omega}_{xyz} = - \frac{\partial \dot{Y}}{\partial Z} \bar{e}_x + \frac{\partial \dot{X}}{\partial Z} \bar{e}_y = \omega_x \bar{e}_x + \omega_y \bar{e}_y \quad (5)$$

escrita no referencial dos eixos principais de inércia.

Nas expressões acima \bar{e}_x , \bar{e}_y e \bar{e}_z são os vetores unitários do referencial $x y z$.

Tendo em vista que o sistema móvel $x y z$ não é solidário ao volante, a velocidade angular absoluta do mesmo é:

$$\bar{\omega}_{xyz}^v = - \frac{\partial \dot{Y}}{\partial Z} \bar{e}_x + \frac{\partial \dot{X}}{\partial Z} \bar{e}_y + \Omega \bar{e}_z \quad (6)$$

O momento cinético do volante tem as seguintes componentes absolutas, escritas no referencial móvel:

$$\bar{H}_{xyz} = \pi \dots \omega_i^v \bar{e}_i \quad i = x, y, z \quad (7)$$

$$\bar{H}_{xyz} = - I_d \frac{\partial \dot{Y}}{\partial Z} \bar{e}_x + I_d \frac{\partial \dot{X}}{\partial Z} \bar{e}_y + I_p \Omega \bar{e}_z \quad (8)$$

onde:

\bar{H} = vetor momento cinético do disco;

I_d = momento de inércia de massa, diametral, do volante;

I_p = momento de inércia de massa, polar, do volante.

Tomando agora a derivada total do vetor momento cinético \bar{H} temos:

$$\dot{\bar{H}}_{xyz} = \dot{H}_x \bar{e}_x + \dot{H}_y \bar{e}_y + \dot{H}_z \bar{e}_z + H_x \dot{\bar{e}}_x + H_y \dot{\bar{e}}_y + H_z \dot{\bar{e}}_z \quad (9)$$

Sabendo ainda que

$$\dot{\bar{e}}_x = \bar{\omega}_{xyz} \times \bar{e}_x = (\omega_x \bar{e}_x + \omega_y \bar{e}_y) \times \bar{e}_x = -\omega_y \bar{e}_z = -\frac{\partial \dot{X}}{\partial Z} \bar{e}_z \quad (10)$$

$$\dot{\bar{e}}_y = \bar{\omega}_{xyz} \times \bar{e}_y = (\omega_x \bar{e}_x + \omega_y \bar{e}_y) \times \bar{e}_y = \omega_x \bar{e}_z = -\frac{\partial \dot{Y}}{\partial Z} \bar{e}_z \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \dot{\bar{e}}_z &= \bar{\omega}_{xyz} \times \bar{e}_z = (\omega_x \bar{e}_x + \omega_y \bar{e}_y) \times \bar{e}_z = -\omega_x \bar{e}_y + \omega_y \bar{e}_x = \\ &\frac{\partial \dot{X}}{\partial Z} \bar{e}_x + \frac{\partial \dot{Y}}{\partial Z} \bar{e}_y \end{aligned} \quad (12)$$

Substituindo as expressões (10), (11) e (12) em (9) tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{H}}_{xyz} &= I_d \frac{\partial \ddot{Y}}{\partial Z} \bar{e}_x + I_d \frac{\partial \ddot{X}}{\partial Z} \bar{e}_y - I_d \frac{\partial \dot{Y}}{\partial Z} \left(-\frac{\partial \dot{X}}{\partial Z} \right) \bar{e}_z + I_d \frac{\partial \dot{X}}{\partial Z} \left(-\frac{\partial \dot{Y}}{\partial Z} \right) \bar{e}_z + \\ &+ I_p \Omega \left(\frac{\partial \dot{X}}{\partial Z} \bar{e}_x + \frac{\partial \dot{Y}}{\partial Z} \bar{e}_y \right) \end{aligned}$$

Logo

$$\dot{\bar{H}}_{xyz} = \left(-I_d \frac{\partial \ddot{Y}}{\partial Z} + I_p \Omega \frac{\partial \dot{X}}{\partial Z} \right) \bar{e}_x + \left(I_d \frac{\partial \ddot{X}}{\partial Z} + I_p \Omega \frac{\partial \dot{Y}}{\partial Z} \right) \bar{e}_y \quad (13)$$

Usando mais uma vez da simplificação, baseado nas pequenas deformações do eixo, pode ser escrito,

$$\bar{e}_x \approx \bar{i}$$

$$\bar{e}_y \approx \bar{j} \quad (14)$$

$$\bar{e}_z \approx \bar{k}$$

sendo \bar{i} , \bar{j} , \bar{k} os vetores unitários de $X Y Z$ (referencial inercial), embora se saiba que $\dot{\bar{e}}_x \neq 0$, $\dot{\bar{e}}_y \neq 0$ e $\dot{\bar{e}}_z \neq 0$.

Considerando ainda que a massa do volante se distribui apenas sobre o seu plano médio, paralelo às faces (vo-lante considerado sem espessura), pode-se dizer que:

$$I_p = 2 I_d \quad (15)$$

Substituindo (14) e (15) em (13) diz-se:

$$\dot{\bar{H}}_{XYZ} = \left(- I_d \frac{\partial \ddot{Y}}{\partial Z} + 2\Omega I_d \frac{\partial \dot{X}}{\partial Z} \right) \bar{i} + \left(I_d \frac{\partial \ddot{X}}{\partial Z} + 2\Omega I_d \frac{\partial \dot{Y}}{\partial Z} \right) \bar{j} \quad (16)$$

Como a derivada do momento cinético é igual ao momento das forças externas relativamente ao seu centro de gravidade, pode-se escrever

$$\dot{\bar{H}} = \Sigma \bar{M}$$

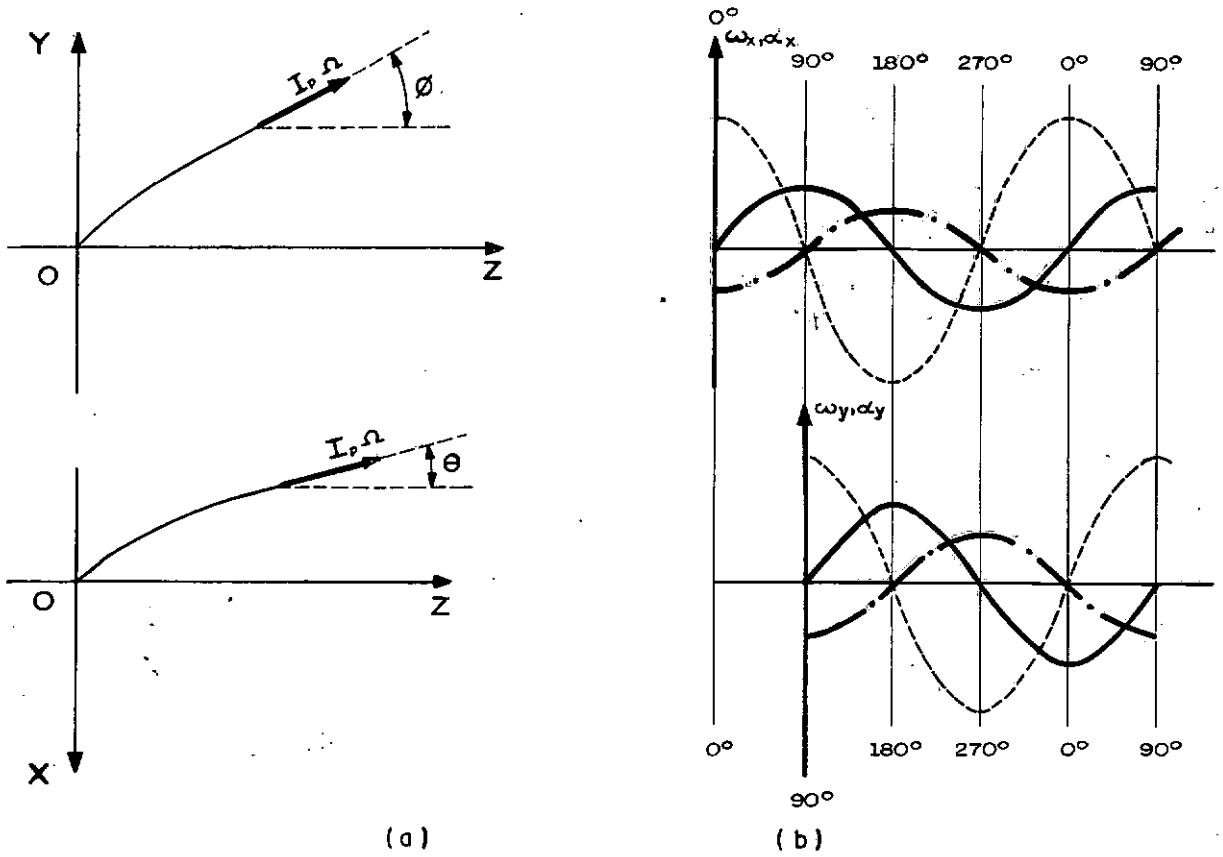
pode-se então concluir, observando que em (16)

$$\dot{\bar{H}} \cdot \bar{i} = - I_d \left(\frac{\partial \ddot{Y}}{\partial Z} - 2\Omega \frac{\partial \dot{X}}{\partial Z} \right) \quad (17)$$

$$\dot{\bar{H}} \cdot \bar{j} = I_d \left(\frac{\partial \ddot{X}}{\partial Z} + 2\Omega \frac{\partial \dot{Y}}{\partial Z} \right) \quad (18)$$

onde $\dot{H} \cdot \bar{i}$ e $\dot{H} \cdot \bar{j}$ são as componentes do somatório dos momentos aplicados ao volante nas direções \bar{X} e \bar{Y} .

As equações (5) e (16) fornecem a velocidade angular e a resultante dos momentos aplicados ao disco que serão usadas nos capítulos seguintes. As componentes das velocidades e acelerações são mostradas na Figura (7).



—	VELOCIDADE	$\omega_x = -\frac{\partial \dot{y}}{\partial z} ; \omega_y = \frac{\partial \dot{x}}{\partial z}$
----	ACELERAÇÃO, INÉRCIA DE ROTAÇÃO	$\alpha_x = -\frac{\partial \ddot{y}}{\partial z} ; \alpha_y = \frac{\partial \ddot{x}}{\partial z}$
-.-.-	ACELERAÇÃO, EFEITO GIROSCÓPICO	$\alpha_x = -\Omega \frac{\partial \dot{x}}{\partial z} ; \alpha_y = -\Omega \frac{\partial \dot{y}}{\partial z}$

FIG. 7 - ACELERAÇÕES NOS PLANOS YZ e XZ

(a) Deslocamentos máximos do eixo nos planos yz e xz defasados de um quarto de período

(b) Curvas de velocidade e aceleração

III - FREQUÊNCIAS NATURAIS DE UM ROTOR EM BALANÇO, COM SUSPENSÃO ELÁSTICA - SISTEMA DISCRETO

Neste capítulo é usado o modelo matemático simplificado, sugerido por Thomson [18], para solução do problema físico apresentado na Figura (8-a). Através dele serão apresentadas algumas idéias e conceitos, inerentes aos fenômenos, que ficam mais simples quando focalizadas por intermédio deste modelo.

Na abordagem discreta, que é aqui discutida, são admitidas as seguintes simplificações: o eixo contém rigidez elástica, embora não possua massa; as extremidades possuem pequenos trechos rígidos, simulando os comprimentos pertencentes ao mancal e volante, Figura (8-b); o sistema é analisado com apenas dois graus de liberdade X e θ , conforme a Figura (9); o disco é considerado rígido e perfeitamente balanceado. Esta última hipótese tem a finalidade de generalizar o estudo rotação x precessão, uma vez que o desbalanceamento gera precessão síncrona.

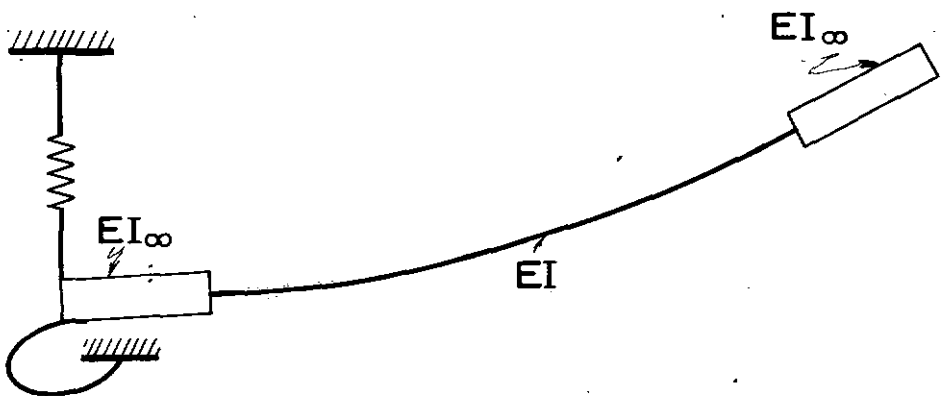
3.1 - EQUAÇÕES BÁSICAS DE EQUILÍBRIO DINÂMICO DO ROTOR

A análise dinâmica do rotor é feita através do equilíbrio de uma viga com as seguintes condições de contorno: (a) suspensão elástica linear e rotacional em uma extremidade e (b) força e momento induzidos pelo disco. Como incógnitas são consideradas a deflexão e a rotação da extremidade que contém o disco.

O equilíbrio da viga conduz à seguinte equação matricial nas variáveis (X, θ) :



(a)



(b)

FIG.8 – ROTOR EM BALANÇO COM SUSPENSÃO ELÁSTICA

(a) MODELO FÍSICO.

(b) ELASTICIDADE DO EIXO.

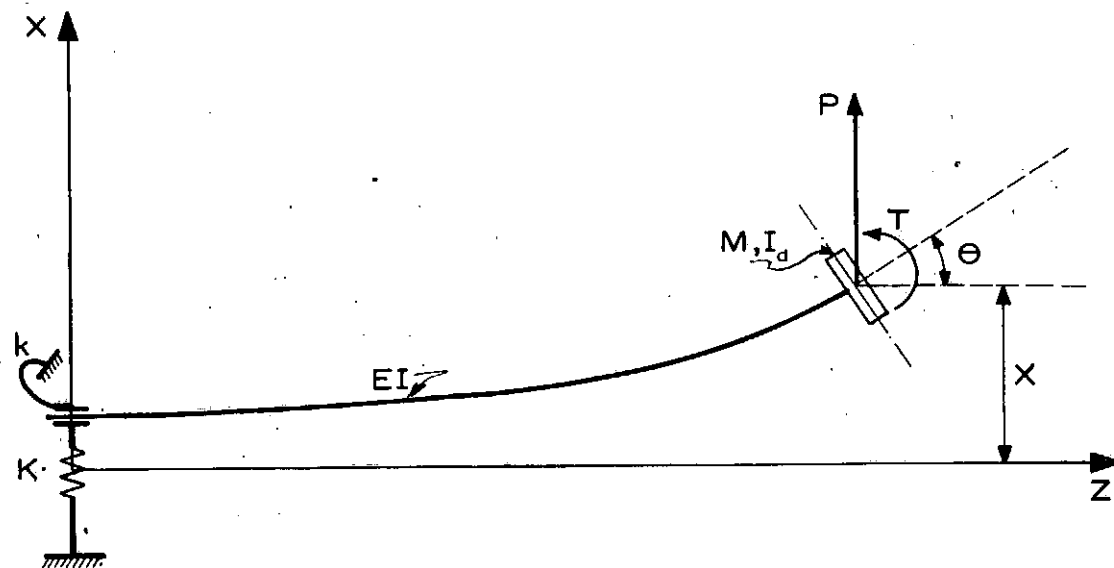


FIG. 9 - COORDENADAS E CARREGAMENTO NA EXTREMIDADE DO EIXO.

P, T - CARREGAMENTO DINÂMICO.

x, θ - COORDENADAS GENERALIZADAS.

$$\begin{Bmatrix} X \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} P \\ T \end{Bmatrix} \quad (19)$$

onde

X - deslocamento do CG do disco

θ - ângulo de rotação do disco

P, T - carregamento dinâmico

$\begin{Bmatrix} \alpha \end{Bmatrix}$ - matriz de flexibilidade do eixo

α_{ij} - coeficientes de influência da matriz de flexibilidade do eixo.

Os coeficientes de influência α_{ij} obtidos com o auxílio da Figura (10), têm os seguintes valores (18):

$$\begin{Bmatrix} \alpha \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{Bmatrix} \quad (20)$$

$$\alpha_{11} = \frac{\ell^3}{3EI} + \frac{\lambda^2 \ell}{EI} + \frac{\lambda \ell^2}{EI} + \frac{1}{K} + \frac{L^2}{k} \quad (21)$$

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} = \frac{\ell^2}{2EI} + \frac{\ell \lambda}{EI} + \frac{L}{k} \quad (22)$$

$$\alpha_{22} = \frac{\ell}{EI} + \frac{1}{k} \quad (23)$$

O carregamento imposto à extremidade do eixo pelo disco tem duas naturezas: uma força de inércia centrífuga P e um momento giroscópico T e suas expressões são:

$$P = M \omega^2 X \quad (24)$$

$$T = I_d \omega^2 \left(a \frac{\Omega}{\omega} - 1 \right) \theta \quad (25)$$

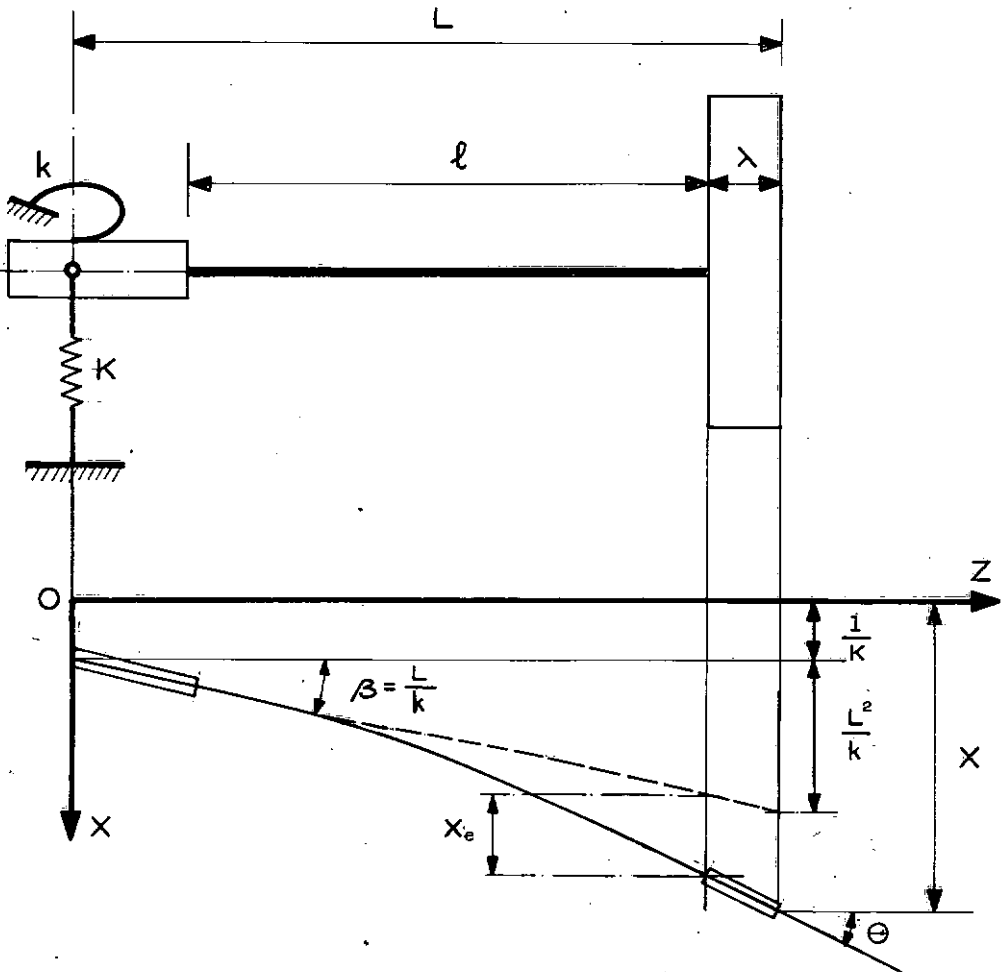


FIG. 10 - PARCELAS DO DESLOCAMENTO DO EIXO DO DISCO

X_e - DEFORMAÇÃO ELÁSTICA DO EIXO.

X - DEFORMAÇÃO TOTAL.

Θ - ROTAÇÃO TOTAL.

$$\alpha_{11} = \frac{\ell^3}{3EI} + \frac{\lambda \ell^2}{EI} + \frac{\lambda^2 \ell}{EI} + \frac{1}{K} + \frac{L^2}{k}$$

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} = \frac{\ell^2}{2EI} + \frac{\ell \lambda}{EI} + \frac{L}{k}$$

$$\alpha_{22} = \frac{\ell}{EI} + \frac{1}{k}$$

$$\begin{Bmatrix} X \\ \Theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} P \\ T \end{Bmatrix}$$

sendo

Ω - rotação do eixo

ω - precessão do eixo

M - massa do disco

I_d - momento de inércia diametral de massa do disco

a - razão entre os momentos de inércia de massa, polar e diametral.

Substituindo as equações (24) e (25) na equação matricial (19) e simplificando, chegamos ao sistema homogêneo de equações nas variáveis X e θ , mostrado a seguir

$$\begin{pmatrix} (\alpha_{11} M \omega^2 - 1) & -\alpha_{12} I_d \omega^2 (a \frac{\Omega}{\omega} - 1) \\ \alpha_{12} M \omega^2 & -\alpha_{22} I_d \omega^2 (a \frac{\Omega}{\omega} - 1) - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (26)$$

Tal sistema terá como solução os valores $X = 0$ e $\theta = 0$ (o sistema estará permanentemente em repouso quaisquer que sejam os valores de rotação- Ω e precessão- ω), a menos que Ω e ω sejam tais que anulem o valor do determinante da matriz dos coeficientes de X e θ .

Os pares de valores (Ω, ω) capazes de anular o determinante referido, caracterizarão uma condição de equilíbrio, na qual o sistema sairá do repouso ($X \neq 0$ ou $\theta \neq 0$), assumindo uma configuração específica de relação constante entre X e θ .

3.2 - EQUAÇÃO DE FREQUÊNCIA

Para generalizar o estudo, considerem-se os seguintes parâmetros adimensionais relacionados a seguir.

$$F = \omega \sqrt{\alpha_{11}} M \quad \text{adimensional de precessão} \quad (27-a)$$

$$S = \Omega \sqrt{\alpha_{11}} M \quad \text{adimensional de rotação} \quad (27-b)$$

$$D = \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{11}} \frac{I_d}{M} \quad \text{adimensional de inércia} \quad (27-c)$$

$$E = \frac{\alpha_{12}^2}{\alpha_{11} \alpha_{12}} \quad \text{adimensional elástico} \quad (27-d)$$

A introdução destes parâmetros na equação (26) fornece o novo sistema homogêneo

$$\begin{pmatrix} (F^2 - 1) & -\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}} EDF^2 \left(a \frac{S}{F} - 1\right) \\ \alpha_{12} F^2 & - \left[DF^2 \left(a \frac{S}{F} - 1\right) + 1 \right] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (27)$$

Anulando o determinante da matriz apresentada na equação (27) e explicitando a rotação adimensional, obtemos:

$$S = \frac{F^4 + \frac{(D+1)}{D(E+1)} F^2 - \frac{1}{D(E-1)}}{a F \left(F^2 + \frac{1}{E-1}\right)} \quad (28)$$

A equação (28) é uma extensão daquela apresentada por Den Hartog [19] com os refinamentos seguintes: suspensão elástica, eixo rígido nas extremidades e relação mais geral entre os momentos de inércia de massa do disco $a = I_p/I_d$.

3.3 - ANÁLISE DAS CURVAS DE FREQUÊNCIA

A equação (28) fornece o conjunto de pontos (S, F) capazes de anular o determinante da equação (27). Tais pontos arranjados sob a forma de curva $(S \times F)$ caracterizam as frequências naturais do eixo em função da variação da rotação, conforme mostrado na Figura (11).

Por ser este modelo simplificado, com apenas dois graus de liberdade, a curva superior da Figura (11) apresenta uma distorção muito grande, pois está substituindo uma infinidade de curvas de frequência natural. A curva inferior, entretanto, pode ser considerada como uma boa aproximação da primeira frequência natural.

Neste ponto pode-se visualizar o fenômeno definido como velocidade crítica, em capítulo anterior. Basta que se imagine uma reta inclinada de 45° , a partir da origem e no primeiro quadrante da Figura (11). Tal reta terá a propriedade de conter os pontos que possuam velocidade de rotação igual à velocidade de precessão. Observando a Figura (12), vê-se que as velocidades críticas são fornecidas pela interseção das curvas de frequência natural com a reta inclinada de 45° .

Den Hartog [20] apresenta considerações importantes para aquisição de sentimento físico dos fenômenos rotodinâmicos. Algumas destas considerações são transcritas abaixo e constituem casos particulares do modelo apresentado.

3.3.1 - Massa do disco concentrada, $I_d = 0$ e portanto $D = 0$.

Levando esta informação para equação (28), verifica-se

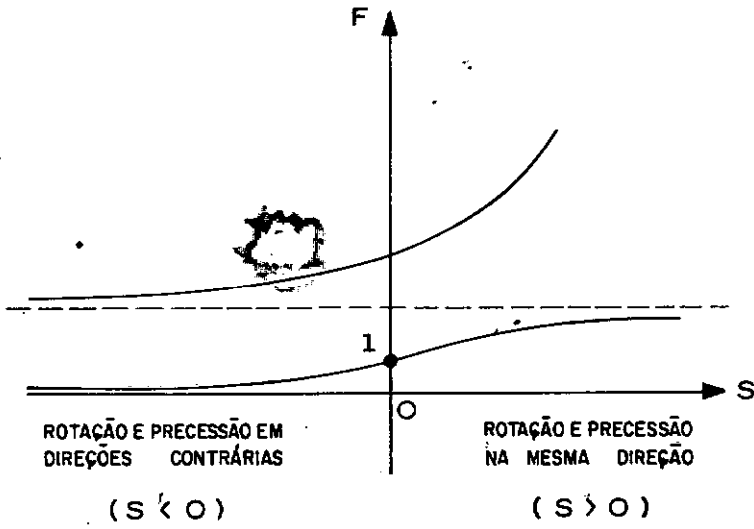


FIG. 11 - FREQUÊNCIAS NATURAIS EM FUNÇÃO DA ROTAÇÃO DO EIXO :

ADIMENSIONAIS : $F = \omega \sqrt{a_{11} M}$, $S = \Omega \sqrt{a_{11} M}$

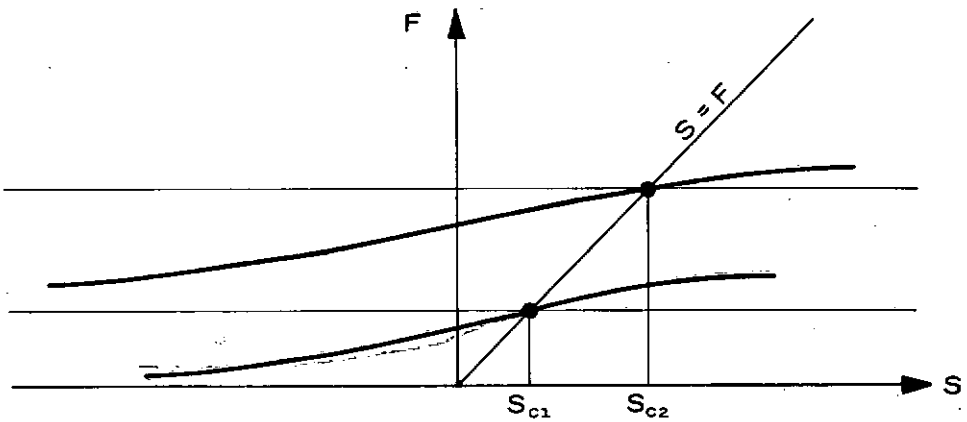


FIG. 12 - VELOCIDADES CRÍTICAS.

que a mesma se reduz a $F^2 = 1$ (20). Por conseguinte $\omega = \sqrt{K/M}$, que é um caso bastante conhecido do estudo de vibrações com um grau de liberdade.

3.3.2 - Inexistência de acoplamento elástico, $E = 0$ (uma força causará deflexão sem deformação angular enquanto um momento flexiona o eixo sem que haja deslocamento). Exemplo desta situação é o caso de um eixo biapoiado com um disco no centro.

Quando $E \rightarrow 0$, a equação (28) transforma-se em

$$(F + 1) (F - 1) (F^2 - aSF - \frac{1}{D}) = 0 \quad (29)$$

Fazendo o acoplamento inercial igual a unidade, $D = 1$, chega-se à curva de rotação x precessão de características particulares, ver Figura (13).

$D = 1$ implica em dizer que o conjunto eixo-disco foi projetado de forma a possuir a mesma frequência natural de vibração para os seus dois modos naturais (para uma rotação nula, $S = 0$).

3.3.3 - Influência da espessura do disco. Quando tal espessura cresce gradualmente, o comportamento do disco aproxima-se, inicialmente, ao de uma carga concentrada, pois o efeito giroscópico vai sendo atenuado. Observando a Figura (14) percebe-se que o crescimento da espessura do disco dá origem a um momento desestabilizador, que tende a afastar o disco de sua posição de equilíbrio. Já no caso de pequenas espessuras, observa-se que o efei-

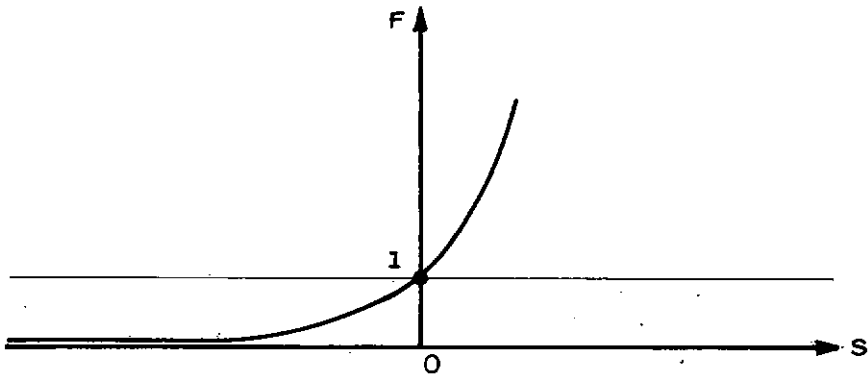


FIG. 13 - FREQUÊNCIAS NATURAIS NO CASO DE DESACOPLAMENTO ELÁSTICO: $E=0$, $D=1$.

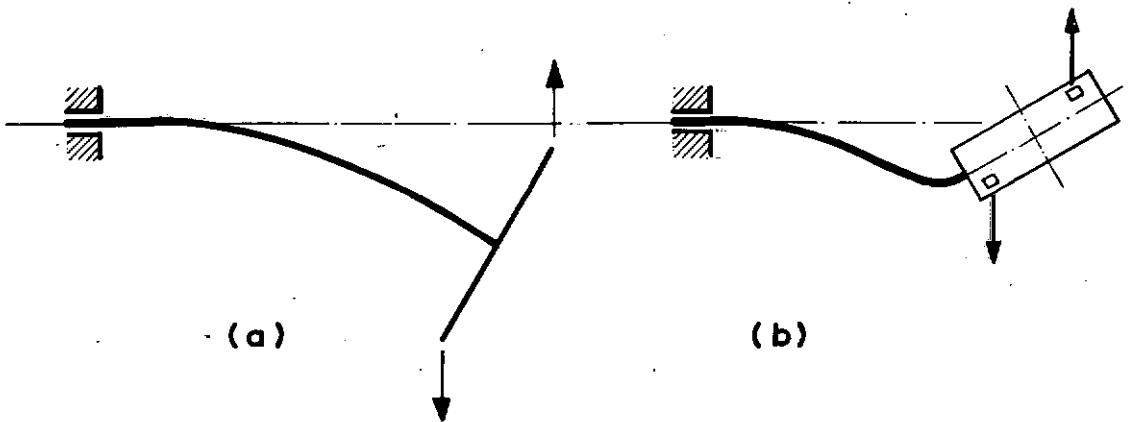


FIG. 14 - ATUAÇÃO DAS FORÇAS CENTRÍFUGAS NO DISCO.

(a) - DISCO SEM ESPESSURA: Corrige a posição inicial

(b) DISCO COM GRANDE ESPESSURA: Afasta da posição inicial

to do momento gerado a partir das forças centrífugas é no sentido de restaurar o equilíbrio do sistema.

IV - FREQUÊNCIAS E MODOS NATURAIS DE UM ROTOR EM BALANÇO, COM SUSPENSÃO ELÁSTICA - SISTEMA CONTÍNUO

Tendo analisado, no capítulo anterior, um rotor em balanço, segundo um modelo simplificado de apenas dois graus de liberdade, estudaremos agora o mesmo problema físico, sob a ótica de uma modelação matemática mais exata. Trata-se da análise do modelo apresentado na Figura (15), ou seja, de um rotor em balanço, com um disco em uma extremidade e com suspensão elástica na outra.

O modelo matemático, aqui referido, é obtido através do equacionamento do movimento de um elemento genérico de eixo e posterior integração da equação diferencial de movimento, objetivando a determinação da curva elástica do eixo.

Na obtenção da equação diferencial do movimento do rotor, as seguintes simplificações são feitas: a) O material do eixo é homogêneo e isotrópico, apresentando comportamento elástico linear (aplica-se a lei de Hooke); b) São consideradas apenas as deflexões laterais suficientemente pequenas para que a teoria linear valha; c) O diâmetro do eixo é pequeno quando comparado com o seu comprimento, de tal forma que a teoria de viga de Euler-Bernoulli seja válida, estendida com a inclusão da inércia de rotação (21) (o cisalhamento transversal será desprezado); d) Seções planas permanecem planas após deflexão; e) Deformação inicial causada pelo peso próprio é desprezível; f) As curvas tensão x deformação em tração e compressão são idênticas; g) O carregamento (forças e momentos) age no plano que contém o centro de gravidade da seção transversal e em consequência as deformações também estarão contidas neste plano (carac-

terística geométrica do eixo)); h) O disco é rígido; i) O acoplamento do disco ao eixo se dá segundo um ângulo reto (não ocorre deformação angular no ponto de engastamento); j) O eixo é balanceado, o centro geométrico coincide com o centro de gravidade em cada seção reta do eixo.

4.1 - EQUAÇÃO DIFERENCIAL DO MOVIMENTO

Consideremos um elemento de eixo, de comprimento infinitesimal, dotado dos movimentos de rotação e precessão. Sobre este elemento atuam forças elásticas provenientes das reações de trechos adjacentes do eixo, conforme mostrado na Figura (16). O disco elementar estará em equilíbrio, dinâmico, sob a ação das forças elásticas e de inércia, podendo este equilíbrio ser retratado através das leis de Newton

$$\Sigma \bar{F} = m \bar{a}^* \quad (30)$$

$$\Sigma \bar{T}^* = - \dot{\bar{H}} = - \frac{d}{dt} (\pi \bar{\omega}^V) \quad (31)$$

II - tensor de inércia do corpo

$\bar{\omega}_c$ - velocidade angular do corpo

\bar{a}^* - aceleração do centro de gravidade

\bar{T}^* - torques atuantes relativamente ao centro de gravidade (torque de inércia).

Como a curva elástica resultante da deformação do eixo gira com a velocidade de precessão, a mesma será analisada projetando-a em dois planos ortogonais. Desta forma, a posição no espaço, do elemento de cota Z , fica definida pelo vetor $\bar{\eta}$, o qual, é decomposto ve-

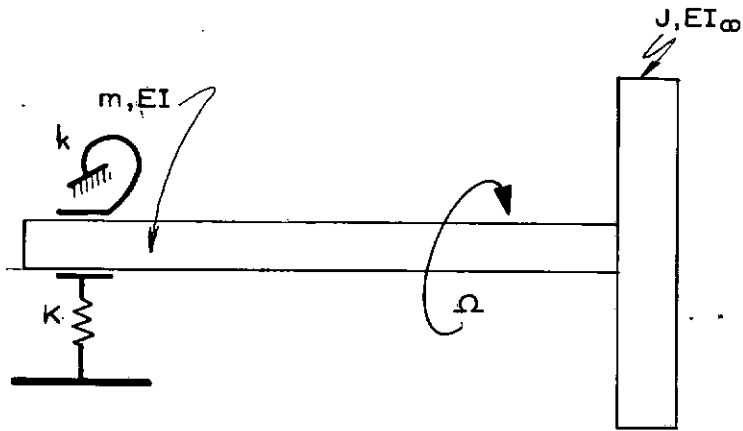


FIG.15- ROTOR EM BALANÇO COM SUSPENSÃO ELÁSTICA.

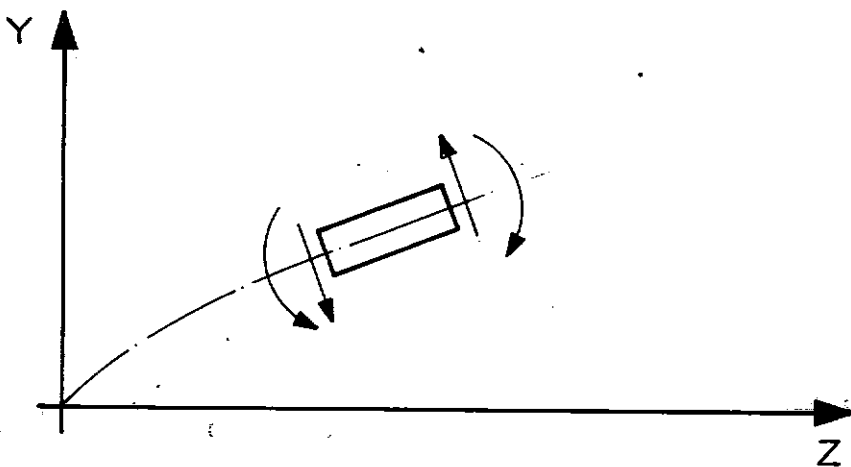


FIG.16 - CARREGAMENTO EXTERNO ATUANTE SOBRE
O ELEMENTO DE EIXO — PLANO YZ.

torialmente. (Ver Figura (17)).

$$\bar{\eta} = \bar{X} + \bar{Y} \quad (32)$$

Para efeito de obtenção das equações de equilíbrio do elemento, no espaço, será adotada a estratégia seguinte:

- a) estabelecimento da equação diferencial do movimento conforme visto no plano Y Z (projeção do movimento no plano Y Z);
- b) obtenção da equação diferencial do movimento projetada no plano X Z. (Aplicando-se o operador complexo j à equação diferencial obtida no plano Y Z anterior, fornecendo automática e rapidamente a equação em X Z, sem necessidade de sua dedução);
- c) composição do vetor espacial $\bar{\eta}$ pela soma de seus componentes \bar{X} e \bar{Y} .

O operador j quando aplicado às coordenadas, é definido pelas propriedades,

$$j \bar{X} = \bar{Y} \quad (33)$$

$$j \bar{Y} = -\bar{X} \quad (34)$$

(baseando-se no fato de que para se ir do eixo X para o eixo Y, basta uma rotação de 90° no sentido direto).

4.1.1 - RELAÇÃO ENTRE A CURVATURA E O MOMENTO FLETOR

Quando não se considera o cisalhamento e pressupõe-se curvatura plana, pode-se dizer que a curvatura do eixo

é integralmente provocada pelo momento fletor. A expressão matemática do raio de curvatura plana é a seguinte (22).

$$\rho = \frac{\left(1 + (Y')^2\right)^{3/2}}{Y''} \quad (35)$$

onde:

ρ = raio de curvatura

$$Y' = \frac{\partial Y(Z, t)}{\partial Z}$$

$$Y'' = \frac{\partial^2 Y(Z, t)}{\partial Z^2}$$

Para pequenas deformações do eixo $(Y')^2 = 0$ e

portanto:

$$\rho = \frac{1}{Y''} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\rho} = Y'' \quad (36)$$

Da resistência dos materiais sabe-se que:

$$\epsilon = \frac{(\rho + h) d\theta - \rho d\theta}{\rho d\theta} = \frac{h}{\rho}$$

$$S = E \epsilon = E \frac{h}{\rho}$$

$$M = \int S h dA = \frac{E}{\rho} \int h^2 dA = \frac{EI}{\rho} \quad (37)$$

onde "h" é a dimensão transversal da viga, ver Figura (18).

Substituindo (36) em (37) teremos

$$\bar{M} = EI \bar{Y}'' \quad (38)$$

Neste trabalho valerá a seguinte convenção dos

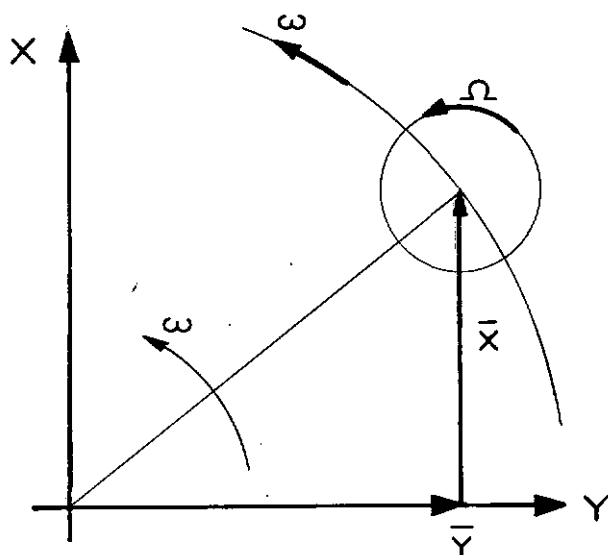


FIG. 17 - COORDENADAS DO CENTRO GEOMÉTRICO DA SEÇÃO RETA DO EIXO, EM FUNÇÃO DA DISTÂNCIA AXIAL Z .

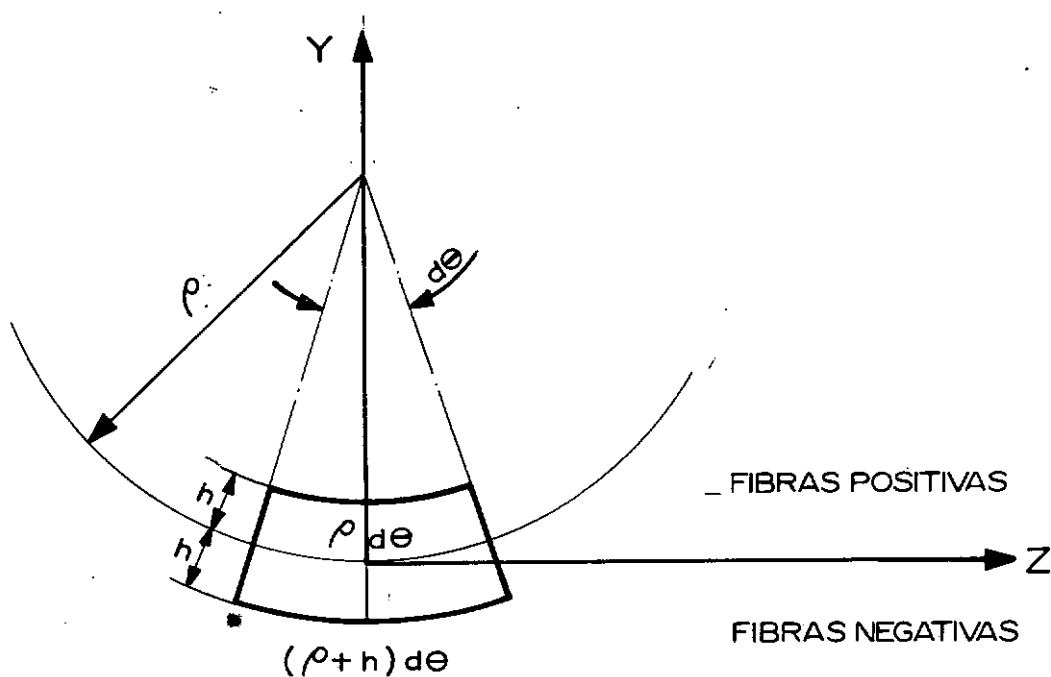


FIG. 18 - GEOMETRIA DA CURVATURA PLANA DO EIXO
SEÇÕES PLANAS PERMANECEM PLANAS.

sinais dos momentos:

- a) no plano Y Z, o momento que traciona as fibras positivas terá a seguinte relação entre a curvatura e o momento fletor. Ver Figura (19)

$$M_X = -EI \frac{\partial^2 Y}{\partial Z^2} \quad (39)$$

- b) para o plano X Z, aplicando o operador j à equação (39), tem-se:

$$M_Y = EI \frac{\partial^2 X}{\partial Z^2} \quad (40)$$

O operador j é usado para girar o referencial de 90° .

4.1.2 - EQUAÇÃO DE EQUILÍBRIO DO ELEMENTO DE EIXO

Considere um elemento infinitesimal de eixo, submetido a momentos fletores e a esforços cortantes conforme a Figura (20).

Aplicando a equação (31) tem-se:

$$\Sigma \bar{M} = \dot{\bar{H}}$$

onde

$\Sigma \bar{M}$ = somatório dos momentos externos

$\dot{\bar{H}}$ = derivada do momento cinético.

Conforme demonstrado no capítulo II, substituindo-se $\dot{\bar{H}}$ de acordo com a equação (16), tem-se:

$$\Sigma \bar{M} = (-I_d \frac{\partial \ddot{Y}}{\partial Z} + I_p \Omega \frac{\partial \dot{X}}{\partial Z}) \bar{i} + (I_d \frac{\partial \ddot{X}}{\partial Z} + I_p \Omega \frac{\partial \dot{Y}}{\partial Z}) \bar{j} + 0\bar{k} \quad (16)$$

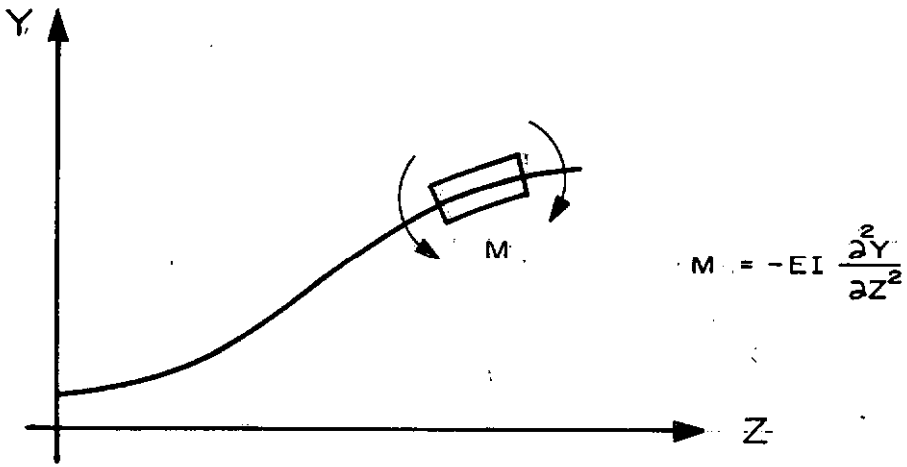


FIG. 19 - CONVENÇÃO DOS MOMENTOS FLETORES NO PLANO XZ .

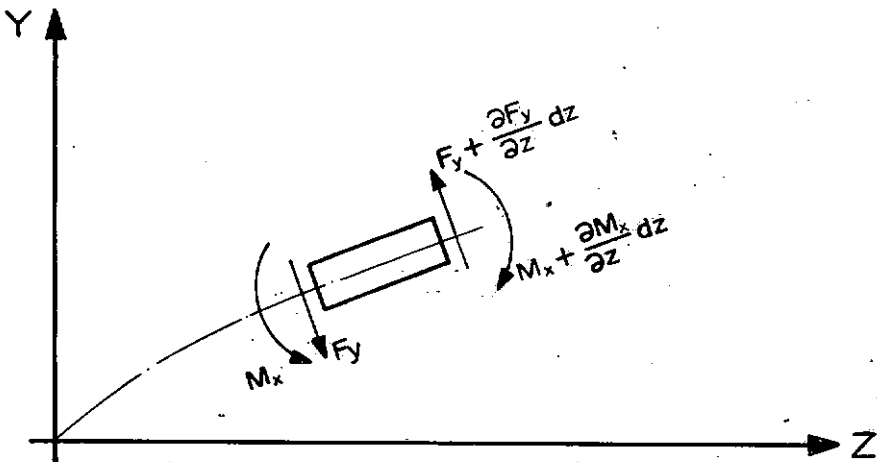


FIG. 20 - CARREGAMENTO EXTERNO ATUANTE SOBRE O ELEMENTO DE EIXO, PLANO YZ .

onde $(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$ são os vetores unitários do referencial inercial.

Pode-se então dizer que no plano Y Z

$$\Sigma \bar{M}_X = I_d \left(-\frac{\partial \ddot{Y}}{\partial Z} + \frac{I_p}{I_d} \Omega \frac{\partial \dot{X}}{\partial Z} \right) \bar{i} \quad (41)$$

para um elemento infinitesimal de eixo

$$I_d = \frac{m R^2}{4} dZ, \quad I_p / I_d = 2$$

sendo;

m = massa por unidade de comprimento do eixo

R = raio do eixo

O somatório dos momentos $\Sigma \bar{M}$, é obtido com auxílio da Figura (20), considerando-se todos os momentos fletores e o momento dos cortantes em relação ao CG do elemento de eixo. No plano Y Z tem-se

$$-M_X + M_X + \frac{\partial M_X}{\partial Z} dZ - F_Y dZ - \frac{\partial F_Y}{\partial Z} dZ \frac{dZ}{2} = I_d \left(-\frac{\partial \ddot{Y}}{\partial Z} + 2\Omega \frac{\partial \dot{X}}{\partial Z} \right)$$

Simplificando,

$$\frac{\partial M_X}{\partial Z} - F_Y = \frac{m R^2}{4} \left(-\frac{\partial \ddot{Y}}{\partial Z} + 2\Omega \frac{\partial \dot{X}}{\partial Z} \right)$$

Explicitando o cortante F_Y em função das coordenadas e do momento fletor no plano

$$F_Y = \frac{\partial M_X}{\partial Z} + \frac{m R^2}{4} \left(\frac{\partial \ddot{Y}}{\partial Z} - 2\Omega \frac{\partial \dot{X}}{\partial Z} \right) \quad (42)$$

Utilizando a equação (30) diz-se que

$$\Sigma \bar{F} = m \bar{a}^*$$

e a partir da Figura (20) escreve-se a equação que falta para completar o equilíbrio do elemento de eixo, ou seja, a equação de equilíbrio das forças externas

$$-F_Y + F_Y + \frac{\partial F_Y}{\partial Z} dZ = m dZ \ddot{Y}$$

Simplificando,

$$\frac{\partial F_Y}{\partial Z} = m \ddot{Y} \quad (43)$$

Derivando a equação (42) em relação à distância axial

$$\frac{\partial F_Y}{\partial Z} = \frac{\partial^2 M_X}{\partial Z^2} + \frac{m R^2}{4} \left(\frac{\partial^2 \ddot{Y}}{\partial Z^2} - 2\Omega \frac{\partial^2 \dot{X}}{\partial Z^2} \right)$$

Substituindo nela as equações (43) e (39) tem-se:

$$EI \frac{\partial^4 Y}{\partial Z^4} + m \ddot{Y} = \frac{m R^2}{4} \left(\frac{\partial^2 \ddot{Y}}{\partial Z^2} - 2\Omega \frac{\partial^2 \dot{X}}{\partial Z^2} \right) \quad (44)$$

que é a equação de movimento do eixo projetado no plano Y Z.

Para obter-se a equação de movimento do eixo no plano X Z, basta que se gire o referencial de 90° , através da aplicação do operador j

$$EI \frac{\partial^4 j Y}{\partial Z^4} + m j \ddot{Y} = \frac{m R^2}{4} \left(\frac{\partial^2 j \ddot{Y}}{\partial Z^2} - 2\Omega \frac{\partial^2 j \dot{X}}{\partial Z^2} \right)$$

$$- EI \frac{\partial^4 X}{\partial Z^4} - m \ddot{X} = \frac{m R^2}{4} \left(- \frac{\partial^2 \ddot{X}}{\partial Z^2} - 2\Omega \frac{\partial^2 \dot{Y}}{\partial Z^2} \right)$$

e portanto, a equação diferencial do movimento escrita no plano XZ é

$$EI \frac{\partial^4 X}{\partial Z^4} + m \ddot{X} = \frac{m R^2}{4} \left(\frac{\partial^2 \ddot{X}}{\partial Z^2} + 2\Omega \frac{\partial^2 \dot{Y}}{\partial Z^2} \right) \quad (45)$$

Compondo-se agora o movimento do eixo, pela soma de seus vetores posição \bar{X} e \bar{Y} , teremos a posição do eixo no espaço. Para tanto utiliza-se a variável complexa η definida como

$$\eta = X + i Y \quad (32-a)$$

Multiplicando-se a equação (44) pelo imaginário i e somando com a equação (45) e substituindo (32-a) tem-se

$$EI \frac{\partial^4 \eta}{\partial Z^4} + m \ddot{\eta} - \frac{m R^2}{4} \frac{\partial^2 \ddot{\eta}}{\partial Z^2} + 2i\Omega \frac{m R^2}{4} \frac{\partial^2 \dot{\eta}}{\partial Z^2} = 0 \quad (46)$$

que é a equação diferencial de movimento de um eixo no espaço.

Cada termo da equação acima tem a dimensão de uma carga distribuída. Assim (23):

$$\frac{m R^2}{4} \frac{\partial^2 \ddot{\eta}}{\partial Z^2} \quad - \text{ parcela associada à inércia de rotação;}$$

$$2i\Omega \frac{m R^2}{4} \frac{\partial^2 \dot{\eta}}{\partial Z^2} \quad - \text{ parcela associada ao efeito giroscópio;}$$

$$EI \frac{\partial^4 \eta}{\partial Z^4} \quad - \text{ parcela de reação elástica;}$$

$$m \ddot{\eta} \quad - \text{ parcela associada à inércia de translação.}$$

4.1.3 - DETERMINAÇÃO DA RELAÇÃO ENTRE O CORTANTE E O MOMENTO FLETOR

A relação entre o cortante e o momento fletor surge naturalmente quando se escreve a equação de equilíbrio dos momentos que atuam no elemento de eixo. Esta expressão, obtida na equação (42),

$$F_Y = \frac{\partial M_X}{\partial Z} + \frac{m R^2}{4} \left(\frac{\partial \ddot{Y}}{\partial Z} - 2\Omega \frac{\partial \dot{X}}{\partial Z} \right) \quad (42)$$

é bastante utilizada no estudo de vigas, salvo a segunda parcela que é relativa aos movimentos de rotação e precessão do eixo.

Será convencionado como positivo o cortante representado na Figura (21). A representação de um cortante negativo será obtida pela inversão das setas da mesma Figura.

4.2 - CARACTERIZAÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO

Tendo definido a equação diferencial, precisamos agora determinar as expressões dos momentos e cortantes que agem nas extremidades do eixo, quando o conjunto em estudo é posto em movimento.

Como a solução da equação diferencial de movimento dependerá do comportamento das extremidades do conjunto, estabeleceremos as condições de contorno que completam a simulação matemática do modelo físico em estudo.

4.2.1 - CONDIÇÕES DE CONTORNO DA EXTREMIDADE COM VOLANTE

Para obter o cortante na extremidade com disco, usamos as equações (42) e (39).

$$F_Y = -EI \frac{\partial^3 Y}{\partial Z^3} + \frac{m R^2}{4} \left(\frac{\partial \ddot{Y}}{\partial Z} - 2\Omega \frac{\partial \dot{X}}{\partial Z} \right) \quad (47)$$

Observando a Figura (22) vemos que $F_Y = -M\ddot{Y}$, logo

$$-M\ddot{Y} = -EI \frac{\partial^3 Y}{\partial Z^3} + \frac{m R^2}{4} \left(\frac{\partial \ddot{Y}}{\partial Z} - 2\Omega \frac{\partial \dot{X}}{\partial Z} \right) \quad (48)$$

O cortante no plano X Z é obtido aplicando-se o operador de rotação j , fornecendo

$$M\ddot{X} = EI \frac{\partial^3 X}{\partial Z^3} - \frac{m R^2}{4} \left(\frac{\partial \ddot{X}}{\partial Z} + 2\Omega \frac{\partial \dot{Y}}{\partial Z} \right) \quad (49)$$

Multiplicando a equação (48) por $-i$ e somando com (49) tem-se:

$$M(\ddot{X} + i\ddot{Y}) = EI \frac{\partial^3}{\partial Z^3} (X + iY) - \frac{m R^2}{4} \left(\frac{\partial}{\partial Z} (\ddot{X} + i\ddot{Y}) - 2\Omega \frac{\partial}{\partial Z} (i\dot{X} - \dot{Y}) \right)$$

Substituindo a expressão $\eta = X + iY$, temos finalmente o cortante na extremidade com disco.

$$M\ddot{\eta} = EI \frac{\partial^3 \eta}{\partial Z^3} - \frac{m R^2}{4} \left(\frac{\partial \ddot{\eta}}{\partial Z} - 2i\Omega \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial Z} \right) \quad (50)$$

O momento fletor na extremidade com disco é obtido pela combinação das equações (39) e (41), com sinal trocado:

$$-EI \frac{\partial^2 Y}{\partial Z^2} = I_d \left(\frac{\partial \ddot{Y}}{\partial Z} - 2\Omega \frac{\partial \dot{X}}{\partial Z} \right) \quad (51)$$

Aplicando o operador de rotação j , a equação (51), surge a expressão do momento no plano XZ

$$EI \frac{\partial^2 X}{\partial Z^2} = I_d \left(-\frac{\partial \ddot{X}}{\partial Z} - 2\Omega \frac{\partial \dot{Y}}{\partial Z} \right) \quad (52)$$

Multiplicando a equação (51) por $-i$ e somando com (52), teremos:

$$EI \frac{\partial^2 \eta}{\partial Z^2} = -I_d \left(\frac{\partial \ddot{\eta}}{\partial Z} - 2i\Omega \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial Z} \right) \quad (53)$$

4.2.2 - CONDIÇÕES DE CONTORNO NA EXTREMIDADE COM MOLA

Novamente, para determinar o cortante (desta vez na extremidade com mola), usamos as equações (42) e (39) que combinadas fornecem a equação (47).

Observando a Figura (23) tem-se $F_Y = -KY$ logo, considerando a curvatura negativa,

$$-KY = EI \frac{\partial^3 Y}{\partial Z^3} + \frac{m R^2}{4} \left(\frac{\partial \ddot{Y}}{\partial Z} - 2\Omega \frac{\partial \dot{X}}{\partial Z} \right) \quad (54)$$

Aplicando o operador de rotação j , tem-se que

$$KX = -EI \frac{\partial^3 X}{\partial Z^3} - \frac{m R^2}{4} \left(\frac{\partial \ddot{X}}{\partial Z} + 2\Omega \frac{\partial \dot{Y}}{\partial Z} \right) \quad (55)$$

Somando-se a equação (55) com a equação (54) multiplicada por $-i$ tem-se

$$-K\eta = EI \frac{\partial^3 \eta}{\partial Z^3} + \frac{m R^2}{4} \left(\frac{\partial \ddot{\eta}}{\partial Z} - 2i\Omega \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial Z} \right) \quad (56)$$

que reflete o cortante aplicado na extremidade $Z = 0$.

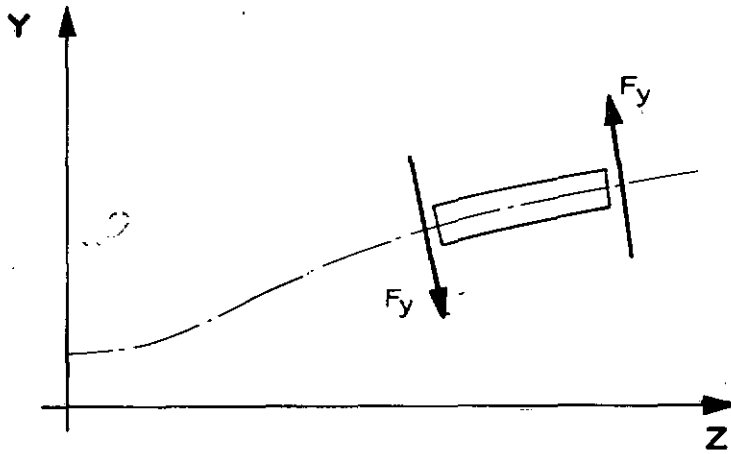


FIG. 21 - CONVENÇÃO DO CORTANTE POSITIVO.

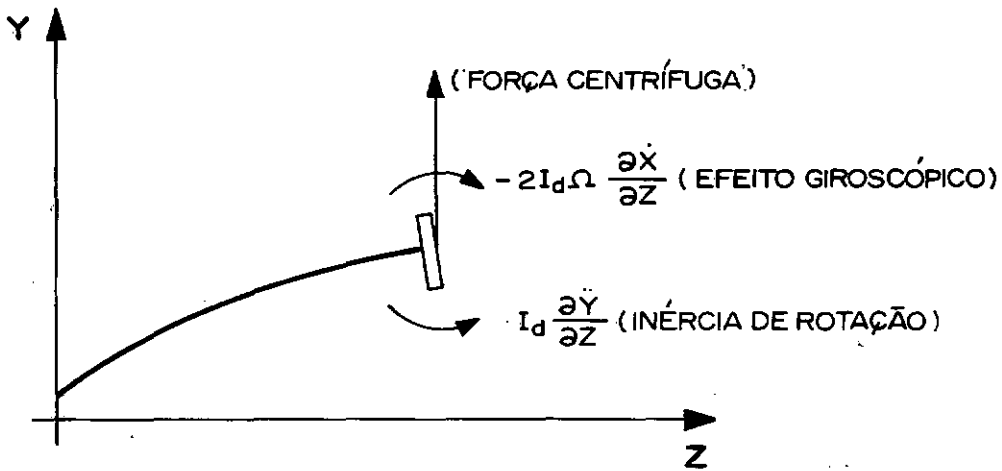


FIG. 22 - CARREGAMENTO APLICADO À EXTREMIDADE DO EIXO PELO DISCO.

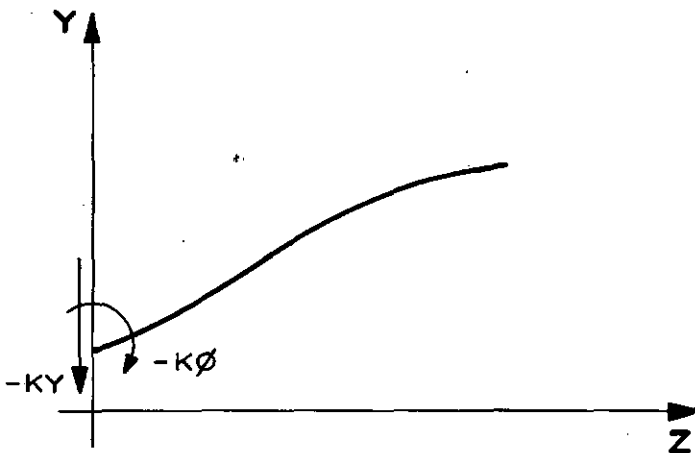


FIG. 23 - CARREGAMENTO QUE A MOLLA APLICA À EXTREMIDADE DO EIXO.

O momento fletor na extremidade com mola é obtido pela aplicação da equação

$$- M_X = - EI \frac{\partial^2 Y}{\partial Z^2} \quad (\text{traciona as fibras negativas})$$

Sendo o momento mostrado na Figura (23)

$$M_X = - k\phi = - k \frac{\partial Y}{\partial Z} \quad (\text{conforme convenção adotada})$$

Substituindo acima, obtemos

$$k \frac{\partial Y}{\partial Z} = - EI \frac{\partial^2 Y}{\partial Z^2} \quad (57)$$

Girando o referencial através do operador j obtemos

$$- k \frac{\partial X}{\partial Z} = EI \frac{\partial^2 X}{\partial Z^2}$$

Compondo as coordenadas X e Y para obtenção do complexo η , temos

$$EI \frac{\partial^2 \eta}{\partial Z^2} = - k \frac{\partial \eta}{\partial Z} \quad (58)$$

Resumindo, as condições de contorno do eixo são:

- a) extremidade com disco - equações (50) e (53);
- b) extremidade com mola - equações (56) e (58).

4.3 - SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE MOVIMENTO

A simulação do comportamento dinâmico de um rotor flexível, conforme apresentado na Figura (15), consiste em

resolver a equação diferencial

$$m\ddot{\eta} + EI \frac{\partial^4 \eta}{\partial Z^4} - \frac{m R^2}{4} \left(\frac{\partial^2 \ddot{\eta}}{\partial Z^2} - 2i\Omega \frac{\partial^2 \dot{\eta}}{\partial Z^2} \right) = 0 \quad (46)$$

condicionada às restrições impostas pelas características das extremidades do eixo. No presente modelo físico, são as seguintes as condições de contorno:

$$EI \frac{\partial^3 \eta}{\partial Z^3} = -K\eta - \frac{m R^2}{4} \left(\frac{\partial \ddot{\eta}}{\partial Z} - 2i\Omega \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial Z} \right) \Big|_{Z=0} \quad (56)$$

$$EI \frac{\partial^2 \eta}{\partial Z^2} = -k \frac{\partial \eta}{\partial Z} \Big|_{Z=0} \quad (58)$$

$$EI \frac{\partial^3 \eta}{\partial Z^3} = M\ddot{\eta} + \frac{m R^2}{4} \left(\frac{\partial \ddot{\eta}}{\partial Z} - 2i\Omega \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial Z} \right) \Big|_{Z=\ell} \quad (50)$$

$$EI \frac{\partial^2 \eta}{\partial Z^2} = -I_d \left(\frac{\partial \ddot{\eta}}{\partial Z} - 2i\Omega \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial Z} \right) \Big|_{Z=\ell} \quad (53)$$

Nas expressões acima o deslocamento transversal do centro da seção, é uma variável complexa e pode ser escrita como $\eta = \eta(Z, t)$.

Em se tratando de vibração natural, supõe-se solução $\eta(Z, t) = F(Z) e^{i\omega t}$. O parâmetro ω (velocidade de precessão), aparece no processo de solução da equação diferencial e representará a velocidade de rotação do plano que contém a linha elástica.

4.3.1 - DETERMINAÇÃO DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS DE VIBRAÇÃO

A solução desta equação diferencial, como vimos, será perseguida por meio da separação de variáveis. Supondo

$$\eta = F e^{i\omega t}, \quad \text{onde} \quad F \equiv F(Z) \quad (59)$$

as derivadas do deslocamento serão:

$$\dot{\eta} = i\omega F e^{i\omega t}$$

$$\ddot{\eta} = -\omega^2 F e^{i\omega t}$$

$$\frac{\partial^4 \eta}{\partial Z^4} = \frac{\partial^4 F}{\partial Z^4} e^{i\omega t}, \text{ etc ...}$$

Substituindo as expressões acima nas equações diferenciais e de contorno e eliminando-se também $e^{i\omega t}$ vem:

$$-m\omega^2 F + EI \frac{d^4 F}{dZ^4} + \frac{m R^2}{4} (\omega^2 - 2\Omega\omega) \frac{d^2 F}{dZ^2} = 0 \quad (60)$$

$$EI \frac{d^3 F}{dZ^3} = -KF + \frac{m R^2}{4} (\omega^2 - 2\Omega\omega) \frac{dF}{dZ}; \quad (Z = 0) \quad (60a)$$

$$EI \frac{d^2 F}{dZ^2} = -k \frac{dF}{dZ}; \quad (Z = 0) \quad (60b)$$

$$EI \frac{d^3 F}{dZ^3} = -m\omega^2 F - \frac{m R^2}{4} (\omega^2 - 2\Omega\omega) \frac{dF}{dZ}; \quad (Z = \ell) \quad (60c)$$

$$EI \frac{d^2 F}{dZ^2} = I_d (\omega^2 - 2\Omega\omega) \frac{dF}{dZ}; \quad (Z = \ell) \quad (60d)$$

Objetivando dar ao estudo uma maior abrangência, adotemos a variável adimensional de posição "z", tal que

$$z = \frac{Z}{\ell}, \quad 0 \leq z \leq 1 \quad (61)$$

Com esta mudança de variável, as derivadas de $F(Z)$ terão as seguintes expressões:

$$\frac{dF}{dZ} = \frac{dF}{dz} \frac{dz}{dZ} = \frac{1}{\ell} \frac{dF}{dz} = \frac{1}{\ell} F'$$

$$\frac{d^2 F}{dZ^2} = \frac{1}{\ell^2} F''$$

$$\frac{d^3 F}{dz^3} = \frac{1}{\ell^3} F'''$$

$$\frac{d^4 F}{dz^4} = \frac{1}{\ell^4} F^{IV}$$

onde, $F' = \frac{dF}{dz}$; $F'' = \frac{d^2 F}{dz^2}$; $F''' = \frac{d^3 F}{dz^3}$; $F^{IV} = \frac{d^4 F}{dz^4}$ e a equação diferencial será:

$$F^{IV} + \frac{m R^2 \ell^2}{4EI} (\omega^2 - 2\Omega\omega) F'' - \frac{m\omega^2 \ell^4}{EI} F = 0$$

ou, abreviadamente

$$F^{IV} + \alpha F'' - \beta^4 F = 0 \quad (62)$$

onde α e β^4 são valores adimensionais expressos por

$$\alpha = \frac{m R^2 \ell^2}{4EI} (\omega^2 - 2\Omega\omega)$$

$$\beta^4 = \frac{m \omega^2 \ell^4}{EI}$$

Analogamente se a distância axial, adimensional, for introduzida nas condições de contorno, ficamos com

$$F''' = - \frac{K\ell^3}{EI} F + \alpha F' \quad ; \quad (z = 0) \quad (62a)$$

$$F'' = - \frac{k\ell}{EI} F' \quad ; \quad (z = 0) \quad (62b)$$

$$F''' = - \bar{\beta}^4 F - \alpha F' \quad ; \quad (z = 1) \quad (62c)$$

$$F'' = \bar{\alpha} F' \quad ; \quad (z = 1) \quad (62d)$$

Sendo $\bar{\alpha}$ e $\bar{\beta}^4$ parâmetros adimensionais, relativos ao volan-

te, cujas expressões são:

$$\bar{\alpha} = \frac{I_d \ell}{EI} (\omega^2 - 2\Omega\omega)$$

$$\bar{\beta}^4 = \frac{M\omega^2 \ell^3}{EI}$$

Estamos diante de uma equação diferencial ordinária linear de quarta ordem, com coeficientes constantes e sua solução terá a forma

$$F(z) = A \sin \varepsilon z + B \cos \varepsilon z + C \sinh \delta z + D \cosh \delta z \quad (63)$$

onde:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \beta^4}} \quad (64)$$

$$\delta = \sqrt{-\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \beta^4}} \quad (65)$$

Para que tenhamos uma melhor visão dos parâmetros adimensionais ε e δ façamos uma breve discussão sobre seus valores.

- a) $\varepsilon = \delta$, sempre que $\alpha = 0$, o que ocorre por exemplo, sempre que $\omega = 2\Omega$
- b) Os valores numéricos de ε e δ para um certo sistema, dependem dos parâmetros Ω e ω , sendo que ε e δ são sempre positivos.

Na Figura (24) apresenta-se os valores de ε e δ nas extremidades de um diagrama $\Omega \times \omega$ arbitrariamente escolhido.

Os valores de ϵ e δ são bem próximos, devido a fraca influência do adimensional α , na definição dos argumentos das funções base da solução da equação diferencial.

Dando prosseguimento à solução da equação diferencial, item 5.3, passaremos à determinação das constantes de integração.

A partir da equação (63) pode-se obter as expressões de $F(z)$, $F'(z)$, $F''(z)$, $F'''(z)$ e substituí-las nas equações (62a), (62b), (62c) e (62d), que são as condições de contorno relativas ao nosso problema.

Assim procedendo surge o sistema homogêneo abaixo:

$$A(-\epsilon^2 - \alpha\epsilon) + \frac{BK\ell^3}{EI} + C(\delta^3 - \alpha\delta) + D\frac{K\ell^3}{EI} = 0 \quad (66)$$

$$A\frac{k\ell\epsilon}{EI} - B\epsilon^2 + C\frac{k\ell\delta}{EI} + D\delta^2 = 0 \quad (67)$$

$$A(-\epsilon^3 \cos \epsilon + \bar{\beta}^4 \sin \epsilon + \alpha\epsilon \cos \epsilon) + B(\epsilon^3 \sin \epsilon + \bar{\beta}^4 \cos \epsilon - \alpha\epsilon \sin \epsilon) + \\ C(\delta^3 \cosh \delta + \bar{\beta}^4 \sinh \delta + \alpha\delta \cosh \delta) + D(\delta^3 \sinh \delta + \bar{\beta}^4 \cosh \delta + \alpha\delta \sinh \delta) = 0 \quad (68)$$

$$A(-\epsilon^2 \sin \epsilon + \bar{\alpha}\epsilon \cos \epsilon) + B(-\epsilon^2 \cos \epsilon + \bar{\alpha}\epsilon \sin \epsilon) + \\ C(\delta^2 \sinh \delta - \bar{\alpha}\delta \cosh \delta) + D(\delta^2 \cosh \delta - \bar{\alpha}\delta \sinh \delta) = 0 \quad (69)$$

Com relação a este último sistema, convém observar que:

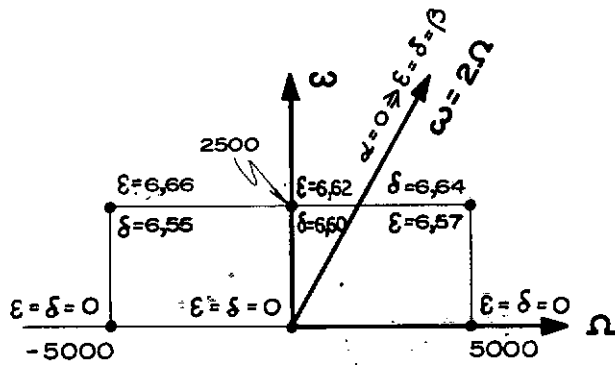
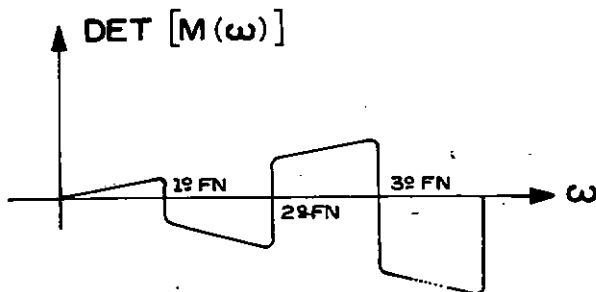
- 1) Estamos diante de um sistema de equações algébricas homogêneo de 4^a ordem (4 equações e 4 incógnitas) representado matricialmente por $[M]\{X\} = \{0\}$, onde $\{X\}^T = \{A \ B \ C \ D\}$ e $[M] =$ matriz dos coeficientes

- 2) Uma solução possível para o sistema é $A = B = C = D = 0$ (solução trivial), em que não há flexão no eixo.
- 3) Para que a função $F(z)$ tenha uma forma bem definida há necessidade de se impor um valor nulo ao determinante dos coeficientes de A, B, C e D no sistema homogêneo.
- 4) A matriz dos coeficientes $[M]$ é formada por funções transcendentais e seu determinante se anulará em um número infinito de valores de ω (precessão), para cada valor do parâmetro Ω (rotação) previamente fixado.
- 5) O sistema homogêneo em causa encontra-se apresentado na forma matricial na equação (70).

Os valores de ω que anulam o determinante são as frequências naturais de vibração. Para determiná-las procede-se como segue:

- 1) Fixar um valor para o parâmetro Ω (rotação).
- 2) Dá-se valores continuamente ao parâmetro ω (precessão), até que $\text{DET } [M] = 0$, ver Figura (25). Existe um número infinito de valores de ω , para cada Ω , capazes de anular o determinante (24). No presente trabalho selecionamos as três primeiras raízes somente.
- 3) Dá-se novo valor a Ω (rotação), repetindo-se a instrução (2). Organiza-se então uma tabela conforme mostrado esquematicamente na Figura (26).

Em forma compacta, apresenta-se abaixo a equação matricial, envolvendo as constantes a determinar, com as expressões dos parâmetros adimensionais utilizados.

FIG. 24 - VARIAÇÃO DOS PARÂMETROS ε E δ .FIG. 25 - ZEROS DA FUNÇÃO DET. $[M]$, CARACTERIZAM AS FREQUÊNCIAS NATURAIS.

Ω	ω_1	ω_2	ω_3
-1000	---	---	---
---	---	---	---
---	---	---	---
0	---	---	---
---	---	---	---
---	---	---	---
1000	---	---	---

FIG. 26 - FREQUÊNCIAS NATURAIS (ω), EM FUNÇÃO DA ROTAÇÃO.

$$\begin{pmatrix}
 -\epsilon^2 - \alpha\epsilon & \frac{K\ell^3}{EI} & \delta^3 - \alpha\delta & \frac{K\ell^3}{EI} \\
 \frac{k\ell\epsilon}{EI} & -\epsilon^2 & \frac{k\ell\delta}{EI} & \delta^2 \\
 -\epsilon^3 \cos \epsilon + \bar{\beta}^4 \sin \epsilon + \alpha\epsilon \cos \epsilon & \epsilon^3 \sin \epsilon + \bar{\beta}^4 \cos \epsilon - \alpha\epsilon \sin \epsilon & \delta^3 \cosh \delta + \bar{\beta}^4 \sinh \delta + \alpha\delta \cosh \delta & \delta^3 \sinh \delta + \bar{\beta}^4 \cosh \delta + \alpha\delta \sinh \delta \\
 -\epsilon^2 \sin \epsilon - \bar{\alpha}\epsilon \cos \epsilon & -\epsilon^2 \cos \epsilon + \bar{\alpha}\epsilon \sin \epsilon & \delta^2 \sinh \delta - \bar{\alpha}\delta \cosh \delta & \delta^2 \cosh \delta - \bar{\alpha}\delta \sinh \delta
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (70)$$

Relação dos parâmetros adimensionais

$$\alpha = \frac{m R^2 \ell^2}{4EI} (\omega^2 - 2\Omega\omega)$$

$$\beta^4 = \frac{m\omega^2 \ell^4}{EI}$$

$$\bar{\alpha} = \frac{I_d \ell}{EI} (\omega^2 - 2\Omega\omega)$$

$$\bar{\beta}^4 = \frac{M\omega^2 \ell^3}{EI}$$

$$\epsilon = \sqrt{\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \beta^4}}$$

$$\delta = \sqrt{-\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \beta^4}}$$

$$\frac{K\ell^3}{EI}$$

$$\frac{k\ell\delta}{EI}, \quad \frac{k\ell\epsilon}{EI}$$

4.3.2 - DETERMINAÇÃO DOS MODOS NORMAIS DE VIBRAÇÃO

O modo natural de vibração é a linha elástica for necida pela função

$$F(z) = A \sin \epsilon z + B \cos \epsilon z + C \sinh \delta z + D \cosh \delta z \quad (63)$$

a qual, depende de um par (Ω, ω) que anule o determinante da matriz dos coeficientes, $\text{DET } [M] = 0$.

Resolver o sistema representado na equação (70) para um conjunto (Ω, ω) , tal que $\text{DET } [M] = 0$, equivale a resolver o sistema abaixo.

$$\begin{cases} a_{21} A + a_{22} B + a_{23} C + a_{24} D = 0 \\ a_{31} A + a_{32} B + a_{33} C + a_{34} D = 0 \\ a_{41} A + a_{42} B + a_{43} C + a_{44} D = 0 \end{cases} \quad (71)$$

onde $a_{ij} = a_{ij}(\Omega, \omega)$ são elementos da matriz dos coeficientes $[M]$.

Para resolver o sistema homogêneo indeterminado deve-se calcular, por exemplo, os valores de "B", "C" e "D", como função de "A", escrevendo o sistema de equações abaixo.

$$\begin{cases} a_{22} B + a_{23} C + a_{24} D = -a_{21} A \\ a_{32} B + a_{33} C + a_{34} D = -a_{31} A \\ a_{42} B + a_{43} C + a_{44} D = -a_{41} A \end{cases} \quad (72)$$

Pela regra de Cramer temos: $B = \frac{\Delta_B}{\Delta}$; $C = \frac{\Delta_C}{\Delta}$; $D = \frac{\Delta_D}{\Delta}$, onde os determinantes Δ_B , Δ_C , Δ_D são os seguintes:

$$\Delta_B = \begin{vmatrix} -a_{21} A & a_{23} & a_{24} \\ -a_{31} A & a_{33} & a_{34} \\ -a_{41} A & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}; \quad \Delta_C = \begin{vmatrix} a_{22} & -a_{21} A & a_{24} \\ a_{32} & -a_{31} A & a_{34} \\ a_{42} & -a_{41} A & a_{44} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_D = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & -a_{21}A \\ a_{32} & a_{33} & -a_{31}A \\ a_{42} & a_{43} & -a_{41}A \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Podemos escrever, simplificadamente, por

$$\Delta_B = -(\Delta \alpha_{12}) \cdot A ; \quad \Delta_C = (\Delta \alpha_{13}) \cdot A ; \quad \Delta_D = -(\Delta \alpha_{14}) \cdot A$$

onde $\Delta \alpha_{ij}$ é o determinante de 3ª ordem proveniente da eliminação da linha i e da coluna j do DET $[M]$.

Com esta notação, os modos naturais poderão ser expressos como:

$$F_n(z) = A_n \left\{ \sin \epsilon z - \frac{\Delta \alpha_{12}}{\Delta \alpha_{11}} \cos \epsilon z + \frac{\Delta \alpha_{13}}{\Delta \alpha_{11}} \sinh \delta z - \frac{\Delta \alpha_{14}}{\Delta \alpha_{11}} \cosh \delta z \right\} \quad (73)$$

onde introduzimos o índice n para representar o n -ésimo autovetor da série infinita.

V - FREQUÊNCIAS E MODOS NATURAIS DE VIBRAÇÃO DE UM ROTOR BI-APOIADO, COM DISCO INTERMEDIÁRIO - SISTEMA CONTÍNUO

5.1 - EQUAÇÃO DIFERENCIAL DO MOVIMENTO

O problema a ser analisado neste capítulo é apresentado na Figura (27). Consta de um eixo uniforme biapoiado, de massa e elasticidade distribuídas e com um disco rígido, de espessura desprezível, localizado entre os apoios. Tal disco conterá uma massa e um momento de inércia concentrados.

Serão adotadas todas as simplificações apresentadas no início do capítulo IV, para efeito de determinação da equação diferencial de movimento.

Sem perda de generalidade, as condições de contorno serão aquelas apresentadas para o rotor biapoiado de acordo com a Figura (27).

No capítulo IV vimos que a equação diferencial era do tipo

$$EI \frac{\partial^4 \eta}{\partial Z^4} + m\ddot{\eta} - \frac{m R^2}{4} \frac{\partial^2 \ddot{\eta}}{\partial Z^2} + 2i\Omega \frac{m R^2}{4} \frac{\partial^2 \dot{\eta}}{\partial Z^2} = 0 \quad (46)$$

Observa-se, na presente simulação, que o disco não poderá ser considerado através das condições de contorno, como o foi no capítulo anterior. Surge a necessidade de introduzir o seu efeito na própria equação diferencial e integrá-la para as condições de contorno impostas.

Para a consideração da massa e do momento de inércia de massa concentrados, faremos uso de funções especiais: pulso unitário (delta de Dirac) e binário unitário (doublê). Algumas propriedades destas "funções" estão relacionadas no apêndice A.

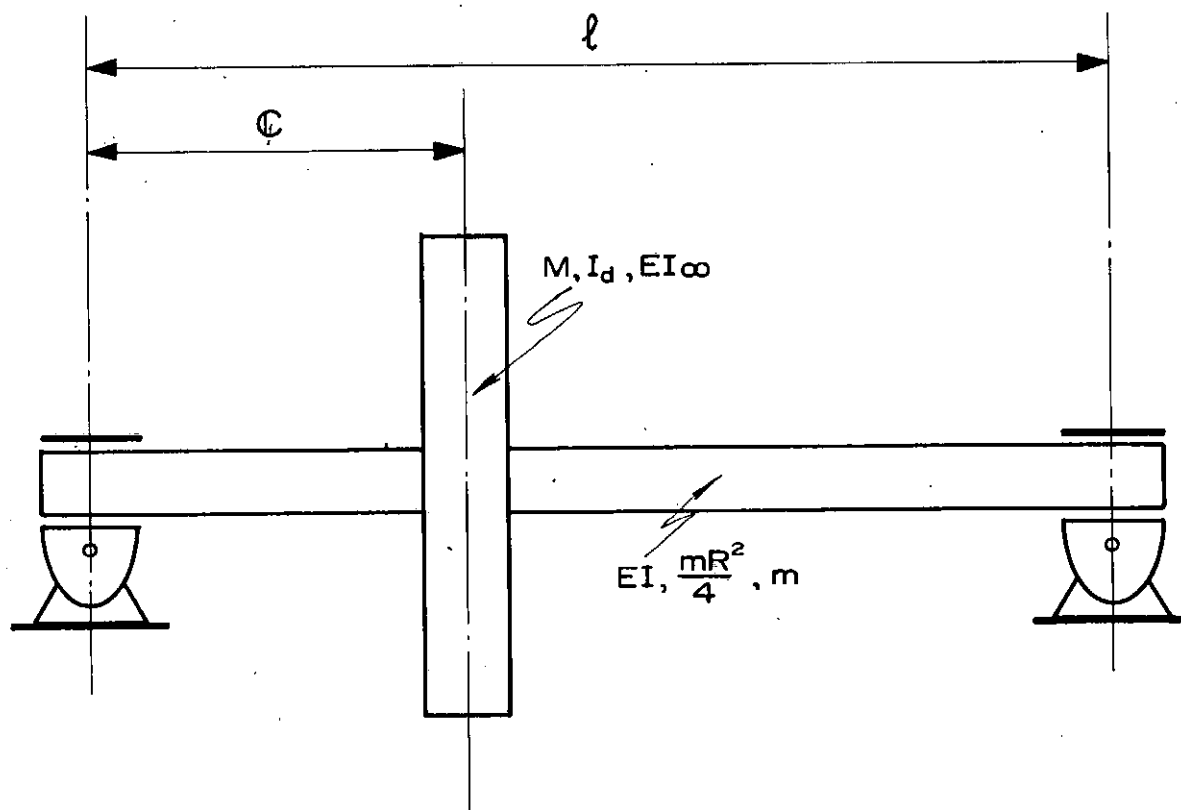


FIG.27 — ROTOR BIAPOIADO SOBRE MANCAIS.

DISCO — MASSA E INÉRCIA CONCENTRADAS, RÍGIDO.
EIXO — MASSA E ELASTICIDADE DISTRIBUÍDAS.

Sejam $m_s(Z)$ e $I_s(Z)$ os novos valores de massa e inércia de massa distribuídas ao longo do eixo (25).

$$m_s(Z) = m + M \delta(Z - C) \quad (74)$$

$$I_s(Z) = \frac{m R^2}{4} + I_d \delta(Z - C) \quad (75)$$

Nas equações acima "m" é a massa (constante) por unidade de comprimento do eixo, "M" a massa concentrada do disco, " $\frac{m R^2}{4}$ " o momento de inércia diametral (constante) por unidade de comprimento do eixo, " I_d " o momento de inércia concentrado, diametral, do disco e $\delta(Z - C)$ uma "função" pulso unitário em $Z = C$.

Substituindo na equação (43) m por m_s (74) e na expressão (42) $\frac{m R^2}{4}$ por I_s (75) e seguindo o mesmo processo do capítulo anterior, com a notação $\eta = X + iY$, chegamos a seguinte expressão:

$$EI \frac{\partial^4 \eta}{\partial Z^4} + m_s \ddot{\eta} = \frac{\partial}{\partial Z} \left(I_s \left(\frac{\partial \ddot{\eta}}{\partial Z} - 2i\Omega \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial Z} \right) \right) \quad (76)$$

Esta expressão é equivalente a equação (46) do capítulo anterior e corresponde a uma extensão da apresentada por Chivens [26].

Substituindo (74) e (75) na equação (76) e sabendo que $\frac{m R^2}{4}$ e I_d não variam com Z podemos escrever:

$$EI \frac{\partial^4 \eta}{\partial Z^4} + m \ddot{\eta} + M \ddot{\eta} \delta(Z - C) - \frac{m R^2}{4} \left(\frac{\partial^2 \ddot{\eta}}{\partial Z^2} - 2i\Omega \frac{\partial^2 \dot{\eta}}{\partial Z^2} \right) - I_d \frac{\partial}{\partial Z} \left(\left(\frac{\partial \ddot{\eta}}{\partial Z} - 2i\Omega \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial Z} \right) \delta(Z - C) \right) = 0 \quad (77)$$

chamando de $Q(Z) = \left(\frac{\partial \ddot{\eta}}{\partial Z} - 2i\Omega \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial Z} \right)$, a derivada da expressão entre colchetes será igual a

$$\frac{\partial}{\partial Z} \left\{ Q(Z) \quad (Z - C) \right\} = Q(C) \delta'(Z - C)$$

onde $\delta'(Z - C)$ é a "função" binário unitário, obtida da derivação da função pulso unitário, ver apêndice A.

Levando este resultado à equação (77) teremos a equação diferencial de movimento do conjunto rotor

$$EI \frac{\partial^4 \eta}{\partial Z^4} + m \ddot{\eta} + M \ddot{\eta} \delta(Z - C) - \frac{m R^2}{4} \left(\frac{\partial^2 \ddot{\eta}}{\partial Z^2} - 2i\Omega \frac{\partial^2 \dot{\eta}}{\partial Z^2} \right) - I_d \left(\frac{\partial \ddot{\eta}}{\partial Z} - 2i\Omega \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial Z} \right) \Big|_{Z=C} \delta'(Z - C) = 0 \quad (78)$$

Todos os termos da expressão acima têm a dimensão de uma força por unidade de comprimento, a saber:

$$EI \frac{\partial^4 \eta}{\partial Z^4} \quad - \text{força de reação elástica}$$

$$m \ddot{\eta} \quad - \text{força centrífuga devida à precessão do eixo}$$

$$M \ddot{\eta} \delta(Z - C) \quad - \text{força centrífuga devida à precessão do disco}$$

$$\frac{m R^2}{4} \frac{\partial^2 \ddot{\eta}}{\partial Z^2} \quad - \text{inércia de rotação de um elemento de eixo}$$

$$I_d \frac{\partial \ddot{\eta}}{\partial Z} \Big|_{Z=C} \delta'(Z - C) \quad - \text{inércia de rotação do disco}$$

$$\frac{m R^2}{4} \cdot 2i\Omega \frac{\partial^2 \dot{\eta}}{\partial Z^2} \quad - \text{efeito giroscópico devido ao elemento de eixo}$$

$$I_d \cdot 2i\Omega \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial Z} \Big|_{Z=C} \delta'(Z - C) \quad - \text{efeito giroscópico devido ao disco}$$

5.2 - CONDIÇÕES DE CONTORNO

Para o rotor biapoiado da Figura (27), são nulos os deslocamentos e os momentos fletores nas duas extremidades, portanto:

$$\eta(0) = 0 \quad (79)$$

$$\left. \frac{\partial^2 \eta}{\partial Z^2} \right|_{Z=0} = 0 \quad (80)$$

$$\eta(l) = 0 \quad (81)$$

$$\left. \frac{\partial^2 \eta}{\partial Z^2} \right|_{Z=l} = 0 \quad (82)$$

5.3 - SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE MOVIMENTO

A curva elástica do rotor flexível se obtém com a solução da equação diferencial (78) sujeita às condições de contorno (79) a (82).

Na pesquisa da solução da equação diferencial su pomos a separação de variáveis, para o deslocamento complexo $\eta = X + iY$:

$$\eta(Z, t) = Q(Z) \cdot e^{i\omega t} \quad (83)$$

onde:

$Q(Z)$ é a curva elástica do eixo, podendo inclusive ser da forma complexa $Q(Z) = q_1(Z) + i q_2(Z)$

ω é a velocidade angular (precessão) do rotor

Introduzindo a separação de variáveis, equação (83), na equação (78) e eliminando o termo comum $e^{i\omega t}$, somos

conduzidos a

$$\begin{aligned}
 EI \frac{d^4 Q}{dZ^4} - m\omega^2 Q - M\omega^2 Q \delta(Z - C) + \frac{m R^2 \omega^2}{4} \left(\frac{d^2 Q}{dZ^2} - 2\Omega\omega \frac{d^2 Q}{dZ^2} \right) \\
 + I_d \omega^2 \left. \frac{dQ}{dZ} \right|_{Z=C} \delta'(Z - C) - 2I_d \Omega\omega \left. \frac{dQ}{dZ} \right|_{Z=C} \delta'(Z - C) = 0
 \end{aligned} \quad (84)$$

Da mesma forma, também, neste capítulo, lançamos mão da mudança de variável, equação (61)

$$z = \frac{Z}{\ell}, \quad \text{sendo} \quad 0 \leq z \leq 1$$

$$c = \frac{C}{\ell}$$

Com a nova variável "z", as derivadas passam a ser expressas por

$$\frac{dQ}{dZ} = \frac{dQ}{dz} \cdot \frac{dz}{dZ} = \frac{1}{\ell} \frac{dQ}{dz} = \frac{1}{\ell} Q'$$

$$\frac{d^2 Q}{dZ^2} = \frac{1}{\ell^2} Q''$$

$$\frac{d^3 Q}{dZ^3} = \frac{1}{\ell^3} Q'''$$

$$\frac{d^4 Q}{dZ^4} = \frac{1}{\ell^4} Q^{iv}$$

e as "funções" pulso e doublê unitário transformam-se em (vide apêndice A).

$$\delta(Z - C) = \frac{1}{\ell} \delta^*(z - c)$$

$$\delta'(Z - C) = \frac{1}{\ell^2} \delta'^*(z - c)$$

Reescrevendo a equação (84) após a mudança de variável e multiplicando por $\frac{\ell^4}{EI}$ chegamos a

$$\begin{aligned}
 Q'''' - \frac{m\omega^2 \ell^4}{EI} Q - \frac{M\omega^2 \ell^3}{EI} Q \delta^*(z - c) + \frac{m R^2 \ell^2}{4EI} (\omega^2 - 2\Omega\omega) Q'' \\
 + \frac{I_d \ell}{EI} (\omega^2 - 2\Omega\omega) Q' \Big|_{z=c} \delta'^*(z - c) = 0
 \end{aligned} \quad (85)$$

A partir deste ponto omitiremos, por simplificação, o asterístico "*" em $\delta^*(z - c)$ e $\delta'^*(z - c)$.

Note-se que os coeficientes de (85) são todos reais e, portanto, a função $Q(z)$ é também real. Isto implica em dizer que a curva elástica $\eta(Z, t)$ está contida em um plano,

$$\eta(z, t) = q_1(Z) \cos \omega t + i q_1(Z) \sin \omega t$$

pois todos os pontos do eixo estão igualmente defasados no tempo.

Substituindo, na equação (85), os parâmetros adimensionais $\alpha, \bar{\alpha}, \beta, \bar{\beta}$ indicados na pág. 54, a equação diferencial apresenta-se sob a seguinte forma compacta

$$Q'''' - \beta^4 Q - \bar{\beta}^4 Q \delta(z - c) + \alpha Q'' + \bar{\alpha} Q' \Big|_{z=c} \delta'(z - c) = 0 \quad (86)$$

a qual está sujeita às condições de contorno

$$Q(0) = 0 \quad (86a)$$

$$Q''(0) = 0 \quad (86b)$$

$$Q(1) = 0 \quad (86c)$$

$$Q''(1) = 0 \quad (86d)$$

Observamos, então, que a equação (86) não é de

solução imediata, como ocorre no caso da equação (62) do capítulo IV, pois neste caso os coeficientes não são constantes em toda a extensão $0 \leq z \leq 1$.

Tratando-se de uma equação diferencial ordinária linear, a solução será obtida com o auxílio da transformada de Laplace, conforme sugerido por Nowacki (27).

A transformada de uma função $G(z)$ é definida como sendo

$$L\{G(z)\} = \int_0^{\infty} e^{-Sz} G(z) dz = \bar{G}(S) = \bar{G}$$

Multiplicando-se cada termo da equação (86) por e^{-Sz} dz e integrando de 0 a ∞ , passamos a ter

$$L\{Q^{IV}\} - \beta^4 L\{Q\} - \bar{\beta}^4 L\{Q \delta(z - c)\} + \alpha L\{Q''\} + \bar{\alpha} L\{Q' \delta'(z - c)\} = 0 \quad (87)$$

Aplicando a tabela de transformada de Laplace (28) podemos escrever a equação algébrica da transformada de $Q(z)$. (Ver de apêndice B).

$$\begin{aligned} (S^4 + \alpha S^2 - \beta^4) \bar{Q} &= Q(0) (S^3 + \alpha S) + Q'(0) (S^2 + \alpha) + S Q''(0) \\ &+ Q'''(0) + \bar{\beta}^4 Q(c) e^{-cS} - \bar{\alpha} Q'(c) S e^{-cS} \end{aligned} \quad (88)$$

Atendendo a que

$$(S^4 + \alpha S^2 - \beta^4) = (S^2 - \delta^2) (S^2 + \epsilon^2)$$

onde :

$$\delta = \sqrt{-\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \beta^4}}$$

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \beta^4}}$$

A transformada de $Q(z)$ finalmente \bar{e} expressa pela seguinte equação algébrica

$$\begin{aligned} \bar{Q} = \frac{1}{(S^2 - \delta^2)(S^2 + \varepsilon^2)} & \left[Q(0) (S^2 + \alpha S) + Q'(0) (S^2 + \alpha) + S Q''(0) \right. \\ & \left. + Q'''(0) + \bar{\beta}^4 Q(c) e^{-cS} - \bar{\alpha} Q'(c) S e^{-cS} \right] \end{aligned} \quad (89)$$

Usando a identidade matemática

$$\frac{1}{(S^2 - \delta^2)(S^2 + \varepsilon^2)} = \frac{1}{\varepsilon^2 + \delta^2} \left(\frac{1}{S^2 - \delta^2} - \frac{1}{S^2 + \varepsilon^2} \right) \quad (90)$$

Substituindo-se (90) na equação (89), a transformada pode ser apresentada em uma fórmula conveniente para sua posterior inversão

$$\begin{aligned} \bar{Q}(S) = \frac{1}{\varepsilon^2 + \delta^2} & \left\{ Q(0) \left(\frac{S^3}{S^2 - \delta^2} - \frac{S^3}{S^2 + \varepsilon^2} + \frac{\alpha S}{S^2 - \delta^2} - \frac{\alpha S}{S^2 + \varepsilon^2} \right) + \right. \\ & + Q'(0) \left(\frac{S^2}{S^2 - \delta^2} - \frac{S^2}{S^2 + \varepsilon^2} + \frac{\alpha}{S^2 - \delta^2} - \frac{\alpha}{S^2 + \varepsilon^2} \right) + \\ & + Q''(0) \left(\frac{S}{S^2 - \delta^2} - \frac{S}{S^2 + \varepsilon^2} \right) + Q'''(0) \left(\frac{1}{S^2 - \delta^2} - \frac{1}{S^2 + \varepsilon^2} \right) + \\ & \left. + \bar{\beta}^4 Q(c) \left(\frac{e^{-cS}}{S^2 - \delta^2} - \frac{e^{-cS}}{S^2 + \varepsilon^2} \right) - \bar{\alpha} Q'(c) \left(\frac{S e^{-cS}}{S^2 - \delta^2} - \frac{S e^{-cS}}{S^2 + \varepsilon^2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (91)$$

Aplicando a tabela do apêndice B, de transforma

das de Laplace inversa, à equação (91) e simplificando, a solução $Q(z)$ é obtida.

$$\begin{aligned}
 Q(z) = & Q(0) \left\{ \frac{1}{\varepsilon^2 + \delta^2} (\delta^2 \cosh \delta z + \varepsilon^2 \cos \varepsilon z) + \frac{\alpha}{\varepsilon^2 + \delta^2} (\cosh \delta z - \cos \varepsilon z) \right\} \\
 & + Q'(0) \left\{ \frac{1}{\varepsilon^2 + \delta^2} (\delta \sinh \delta z + \varepsilon \sin \varepsilon z) + \frac{\alpha}{\varepsilon^2 + \delta^2} \left(\frac{\sinh \delta z}{\delta} - \frac{\sin \varepsilon z}{\varepsilon} \right) \right\} \quad (92) \\
 & + Q''(0) \frac{1}{\varepsilon^2 + \delta^2} (\cosh \delta z - \cos \varepsilon z) + Q'''(0) \frac{1}{\varepsilon^2 + \delta^2} \left(\frac{\sinh \delta z}{\delta} - \frac{\sin \varepsilon z}{\varepsilon} \right) \\
 & + \bar{\beta}^4 Q(c) \frac{1}{\varepsilon^2 + \delta^2} \left(\frac{\sinh \delta(z-c)}{\delta} - \frac{\sin \varepsilon(z-c)}{\varepsilon} \right) \mu(z-c) \\
 & - \bar{\alpha} Q'(c) \frac{1}{\varepsilon^2 + \delta^2} (\cosh \delta(z-c) - \cos \varepsilon(z-c)) \mu(z-c)
 \end{aligned}$$

Observação: δ - parâmetro adimensional
 ε - parâmetro adimensional
 $\mu(z-c)$ - "função" degrau unitário

Para que a equação (92) possa ser escrita de forma mais compacta, definiremos as funções:

$$E = \frac{1}{\varepsilon^2 + \delta^2} \left(\frac{\sinh \delta z}{\delta} - \frac{\sin \varepsilon z}{\varepsilon} \right) \quad (93a)$$

$$E' = F = \frac{1}{\varepsilon^2 + \delta^2} (\cosh \delta z - \cos \varepsilon z) \quad (93b)$$

$$F' = G = \frac{1}{\varepsilon^2 + \delta^2} (\delta \sinh \delta z + \varepsilon \sin \varepsilon z) \quad (93c)$$

$$G' = H = \frac{1}{\varepsilon^2 + \delta^2} (\delta^2 \cosh \delta z + \varepsilon^2 \cos \varepsilon z) \quad (93d)$$

$$H' = \frac{1}{\varepsilon^2 + \delta^2} (\delta^3 \sinh \delta z - \varepsilon^3 \sin \varepsilon z) \quad (93e)$$

Substituindo (93a), (93b), (93c) e (93d) na equação (92) temos

$$\begin{aligned}
 Q(z) = & Q(0) (H(z) + \alpha F(z)) + Q'(0) (G(z) + \alpha E(z)) + Q''(0) F(z) \\
 & + Q'''(0) E(z) + \bar{\beta}^4 Q(c) E(z - c) \mu(z - c) - \bar{\alpha} Q'(c) F(z - c) \mu(z - c)
 \end{aligned}
 \tag{94}$$

A equação (94) é a forma mais geral da curva elástica do eixo, para quaisquer condições de contorno.

Conforme já foi predito anteriormente, ela é uma curva plana, pois todos os seus termos são reais.

5.3.1 - DETERMINAÇÃO DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS DE VIBRAÇÃO

Para o cálculo das frequências naturais, aplica-se, a equação (94), as condições de contorno do problema em causa, que são:

$$Q(0) = Q(1) = 0 \quad \text{e} \quad Q''(0) = Q''(1) = 0$$

Como $Q(0) = 0$ e $Q''(0) = 0$ a equação (94) simplifica-se em:

$$\begin{aligned}
 Q(z) = & Q'(0) (G(z) + \alpha E(z)) + Q'''(0) E(z) + \bar{\beta}^4 Q(c) E(z - c) \mu(z - c) \\
 & - \bar{\alpha} Q'(c) F(z - c) \mu(z - c)
 \end{aligned}
 \tag{95}$$

Para usar as condições de contorno em $z = 1$, precisamos das derivadas

$$\begin{aligned}
 Q'(z) = & Q'(0) (H(z) + \alpha F(z)) + Q'''(0) F(z) + \bar{\beta}^4 Q(c) F(z - c) \mu(z - c) \\
 & - \bar{\alpha} Q'(c) G(z - c) \mu(z - c)
 \end{aligned}
 \tag{96}$$

$$\begin{aligned}
 Q''(z) = & Q'(0) (H'(z) - \alpha G(z)) + Q'''(0) G(z) + \bar{\beta}^4 Q(c) G(z - c) \mu(z - c) \\
 & - \alpha Q'(c) H(z - c) \mu(z - c)
 \end{aligned}
 \tag{97}$$

Substituindo nas equações (95) e (97) as condições de contorno restantes $Q(1) = 0$, $Q''(1) = 0$ e escrevendo os valores de $Q(c)$ e $Q'(c)$, montaremos o sistema homogêneo abaixo

$$\begin{aligned}
 Q'(0)(G(1) + \alpha E(1)) + Q'''(0)E(1) + Q(c)\bar{\beta}^4 E(1-c) - Q'(c)\bar{\alpha}F(1-c) &= 0 \\
 Q'(0)(H'(1) + \alpha G(1)) + Q'''(0)G(1) + Q(c)\bar{\beta}^4 G(1-c) - Q'(c)\bar{\alpha}H(1-c) &= 0 \\
 Q'(0)(G(c) + \alpha E(c)) + Q'''(0)E(c) - Q(c) + 0 &= 0 \\
 Q'(0)(H(c) + \alpha F(c)) + Q'''(0)F(c) + 0 - Q'(c) &= 0
 \end{aligned} \tag{98}$$

Escrevendo este sistema na forma matricial temos

$$\begin{pmatrix}
 G(1) + \alpha E(1) & E(1) & \bar{\beta}^4 E(1-c) & -\bar{\alpha}F(1-c) \\
 H'(1) + \alpha G(1) & G(1) & \bar{\beta}^4 G(1-c) & -\bar{\alpha}H(1-c) \\
 G(1) + \alpha E(c) & E(c) & -1 & 0 \\
 H(c) + \alpha F(c) & F(c) & 0 & -1
 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} Q'(0) \\ Q'''(0) \\ Q(c) \\ Q'(c) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{99}$$

que se constitui em um problema de autovalor. O sistema (99) é homogêneo de 4^a ordem (4 equações e 4 incógnitas), e sua solução será $Q'(0) = Q'''(0) = Q(c) = Q'(c) = 0$ (solução trivial), a menos que o determinante da matriz dos coeficiente se anule.

A anulação do determinante estabelece uma equação de frequência. Para cada valor escolhido de Ω (rotação) existe um número infinito de valores de ω (precessão) que anulam o determinante, formando o conjunto das frequências naturais. A equação de frequência será resolvida numericamente, usando o mesmo algoritmo do capítulo anterior.

5.3.2 - DETERMINAÇÃO DOS MODOS NORMAIS DE VIBRAÇÃO

A solução $Q(z)$ terá sua forma bem definida (problema de autovalor) quando o determinante obtido de (99) se anular, ou seja,

$$Q(z) = Q'(0)(G(z) + \alpha E(z)) + Q'''(0)E(z) + Q(c)\bar{\beta}^4 E(z-c) \mu(z-c) - Q'(c) \bar{\alpha} F(z-c) \mu(z-c) \quad (95)$$

onde $Q'(0)$, $Q'''(0)$, $Q(c)$ e $Q'(c)$ vêm da solução do sistema indeterminado abaixo, pela atribuição de um valor arbitrário à incógnita $Q'(0)$

$$\begin{cases} a_{22} Q'''(0) + a_{23} Q(c) + a_{24} Q'(c) = -a_{21} Q'(0) \\ a_{32} Q'''(0) + a_{33} Q(c) + a_{34} Q'(c) = -a_{31} Q'(0) \\ a_{42} Q'''(0) + a_{43} Q(c) + a_{44} Q'(c) = -a_{41} Q'(0) \end{cases}$$

No sistema acima a_{ij} são os termos da matriz de (99). Aplicando a regra de Cramer temos

$$Q'''(0) = \frac{\Delta Q'''(0)}{\Delta} ; \quad Q(c) = \frac{\Delta Q(c)}{\Delta} \quad \text{e} \quad Q'(c) = \frac{\Delta Q'(c)}{\Delta}$$

onde

$$\Delta Q'''(0) = \begin{vmatrix} -a_{21} Q'(0) & a_{23} & a_{24} \\ -a_{31} Q'(0) & a_{33} & a_{34} \\ -a_{41} Q'(0) & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$\Delta Q(c) = \begin{vmatrix} a_{22} & -a_{21} Q'(0) & a_{24} \\ a_{32} & -a_{31} Q'(0) & a_{34} \\ a_{42} & -a_{41} Q'(0) & a_{44} \end{vmatrix} \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$\Delta Q'(c) = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & -a_{21} Q'(0) \\ a_{32} & a_{33} & -a_{31} Q'(0) \\ a_{42} & a_{43} & -a_{41} Q'(0) \end{vmatrix}$$

Chamando de $(\Delta \alpha_{ij})$ ao determinante de 3^a ordem obtido pela eliminação da linha i e da coluna j do determinante principal, a expressão abaixo define o modo natural de vibração do rotor flexível.

$$Q_n(z) = Q'_n(0) \left\{ (G(z) + \alpha E(z)) - \frac{\Delta \alpha_{12}}{\Delta \alpha_{11}} E(z) + \frac{\Delta \alpha_{13}}{\Delta \alpha_{11}} \bar{\beta}^4 E(z - c) \mu(z - c) - \frac{\Delta \alpha_{14}}{\Delta \alpha_{11}} \bar{\alpha} F(Z - c) \mu(Z - c) \right\} \quad (100)$$

onde introduzimos o índice n para representar o n -ésimo autovetor da série infinita.

$$\Delta Q'''(0) = -(\Delta \alpha_{12}) \cdot Q'(0) ; \quad \Delta Q(c) = (\Delta \alpha_{13}) \cdot Q'(0) ;$$

$$\Delta Q'(c) = -(\Delta \alpha_{14}) \cdot Q'(0)$$

VI - EXEMPLOS NUMÉRICOS DOS TRÊS MODELOS E COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS OBTIDOS NO 1º E 2º MODELOS

6.1 - INFLUÊNCIA DA VARIAÇÃO DE DIVERSOS PARÂMETROS FÍSICOS E GEOMÉTRICOS NA FREQUÊNCIA NATURAL - MODELO DISCRETO

O modelo físico tomado como base para a discussão dos resultados tem as seguintes características:

ROTOR EM BALANÇO - SUSPENSÃO COM MOLAS

Diâmetro do eixo	=	0,05 m
Espessura do disco	=	0,05 m
Diâmetro do disco	=	0,40 m
Comprimento do eixo flexível	=	0,975 m
Material do disco	=	aço
Inércia de flexão do eixo (EI)	=	0,307 kg*.m ²
Massa do disco	=	49,01 kg
Inércia de massa diametral	=	0,50 kg.m ²
Inércia de massa polar	=	0,98 kg.m ²

6.1.1. - INFLUÊNCIA DA VARIAÇÃO DA CONSTANTE DE MOLA LINEAR

Para bem acompanhar a variação apenas da mola linear, o eixo é impedido de girar na extremidade, usando-se uma mola de torção suficientemente rígida, $k = 10^9$ kg*m/rd.

Observando-se a Figura (28) vemos que para valores da constante de mola linear superiores a 10^8 kg*/m não existe alteração sensível nos valores da 1ª frequência natural, isto nos leva a acreditar que valores desta ordem, para a constante de mola linear, são suficientes para simular um engasta-

Constantes de mola linear :

- . . . K_{∞} - RÍGIDO
 x x x $K = 10^8 \text{ kg}^*/\text{m}$
 o o o $K = 10^7 \text{ kg}^*/\text{m}$
 Δ Δ Δ $K = 10^6 \text{ kg}^*/\text{m}$
 * * * $K = 10^5 \text{ kg}^*/\text{m}$
 ⊗ ⊗ ⊗ $K = 10^2 \text{ kg}^*/\text{m}$

Constante da mola de torção :

$$k = 10^9 \text{ kg}^* \text{m} / \text{rd}$$

(\approx rígido)

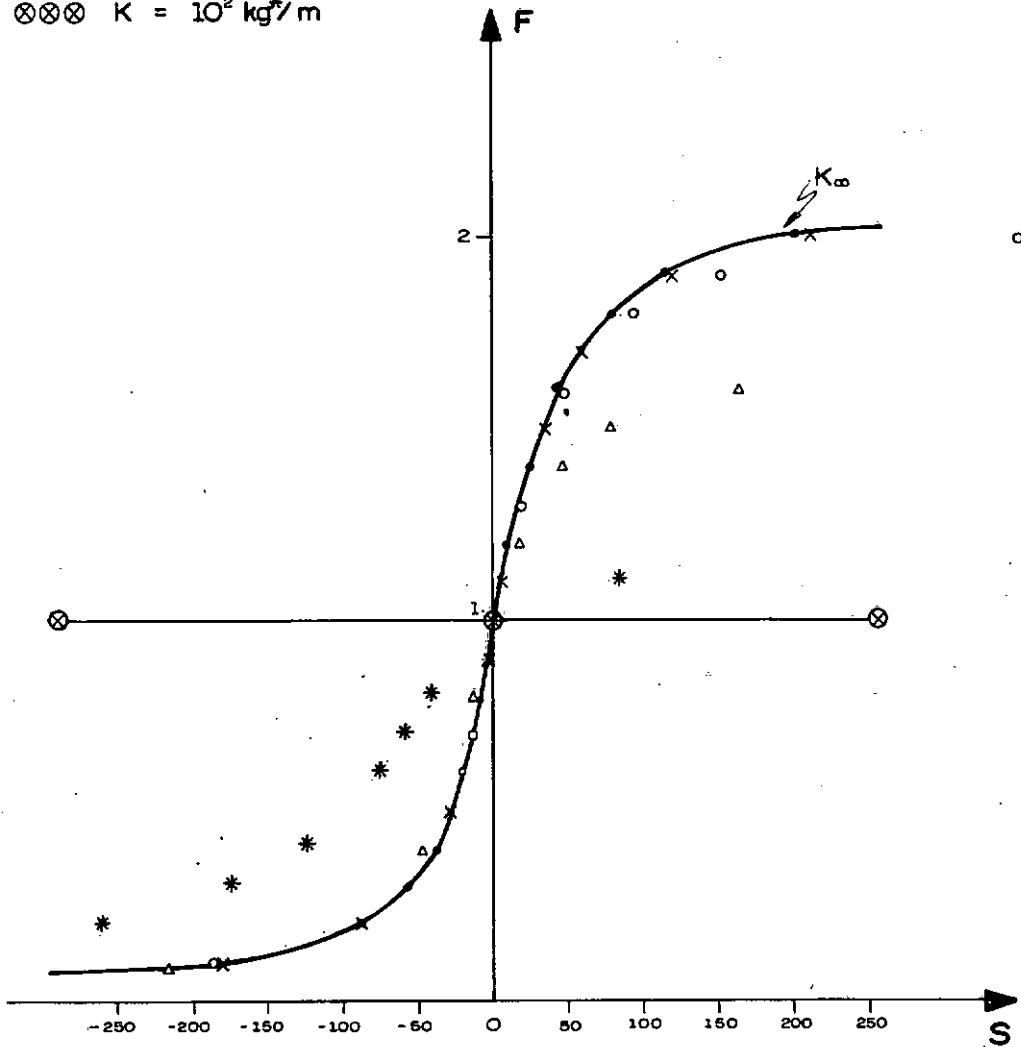


FIG.28 - INFLUÊNCIA DA CONSTATNE DE MOLA LINEAR NA 1ª FREQUÊNCIA NATURAL.

mento rígido.

Quando a constante de mola cai a valores inferiores a $10^2 \text{ kg}^*/\text{m}$ a curva de 1ª frequência natural converge rapidamente para o valor 1 do adimensional F (a mola linear passa a comandar o movimento do 1º modo normal de vibração), notoriamente quando a rotação e a precessão têm a mesma direção. Percebemos também que o sistema deixa de sofrer a ação do efeito giroscópico. Isto ocorre porque no 1º modo normal, quando a suspensão é muito flexível, o conjunto assume movimento de corpo rígido em translação e não ocorre mudança de orientação do eixo do volante. A extremidade comporta-se como livre.

Observando a Figura (29) vemos que, para valores suficientemente altos da constante de mola linear, as curvas de 2ª frequência natural se confundem e portanto passam a independ_{er} do valor desta constante.

Para valores da constante de mola próximos de zero, as curvas de 2ª frequência natural divergem, o que é um comportamento inesperado, pois, tais curvas, também deveriam se superpor. Isto ocorre devido à limitação do modelo em representar frequências naturais acima da primeira.

Constante de mola linear pequena representa uma extremidade livre quanto aos deslocamentos lineares.

6.1.2 - INFLUÊNCIA DA VARIAÇÃO DA CONSTANTE DE MOLA DE TORÇÃO

Em consonância com o caso anterior, fazemos rígida a mola linear, i.e., $K = 10^9 \text{ kg}^*/\text{m}$.

Observando a Figura (30) vemos que para valores

Constantes de mola linear :

- . . . K_{∞} - RÍGIDO
 x x x $K = 10^8 \text{ kg}^*/\text{m}$
 o o o $K = 10^4 \text{ kg}^*/\text{m}$
 Δ Δ Δ $K = 10^3 \text{ kg}^*/\text{m}$

Constante da mola de torção :

$$k_t = 10^8 \text{ kg m}^*/\text{rd}$$

(\cong rígido)

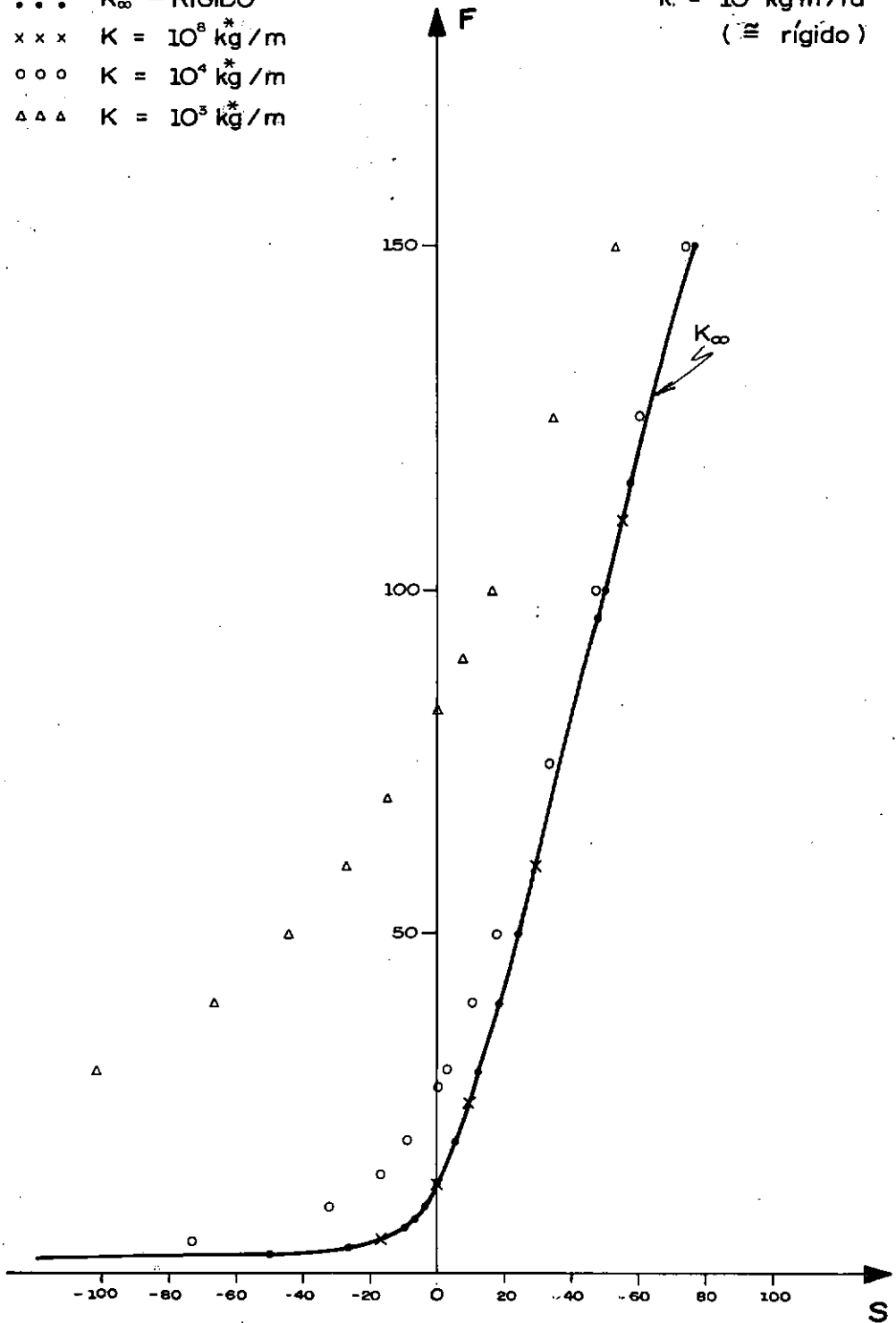


FIG. 29 - INFLUÊNCIA DA CONSTATANTE DE MOLA LINEAR NA 2ª FREQUÊNCIA NATURAL .

Constantes de mola de torção :

- . . . k_{∞} - RÍGIDO
 x x x $k = 10^5 \text{ kgm}^*/\text{rd}$
 * * * $k = 10^3 \text{ kgm}^*/\text{rd}$
 o o o $k = 10^2 \text{ kgm}^*/\text{rd}$
 Δ Δ Δ $k = 0,1 \text{ kgm}^*/\text{rd}$

Constante da mola linear :

$$K^* = 10^9 \text{ kg}^*/\text{m}$$

(\approx rígido)

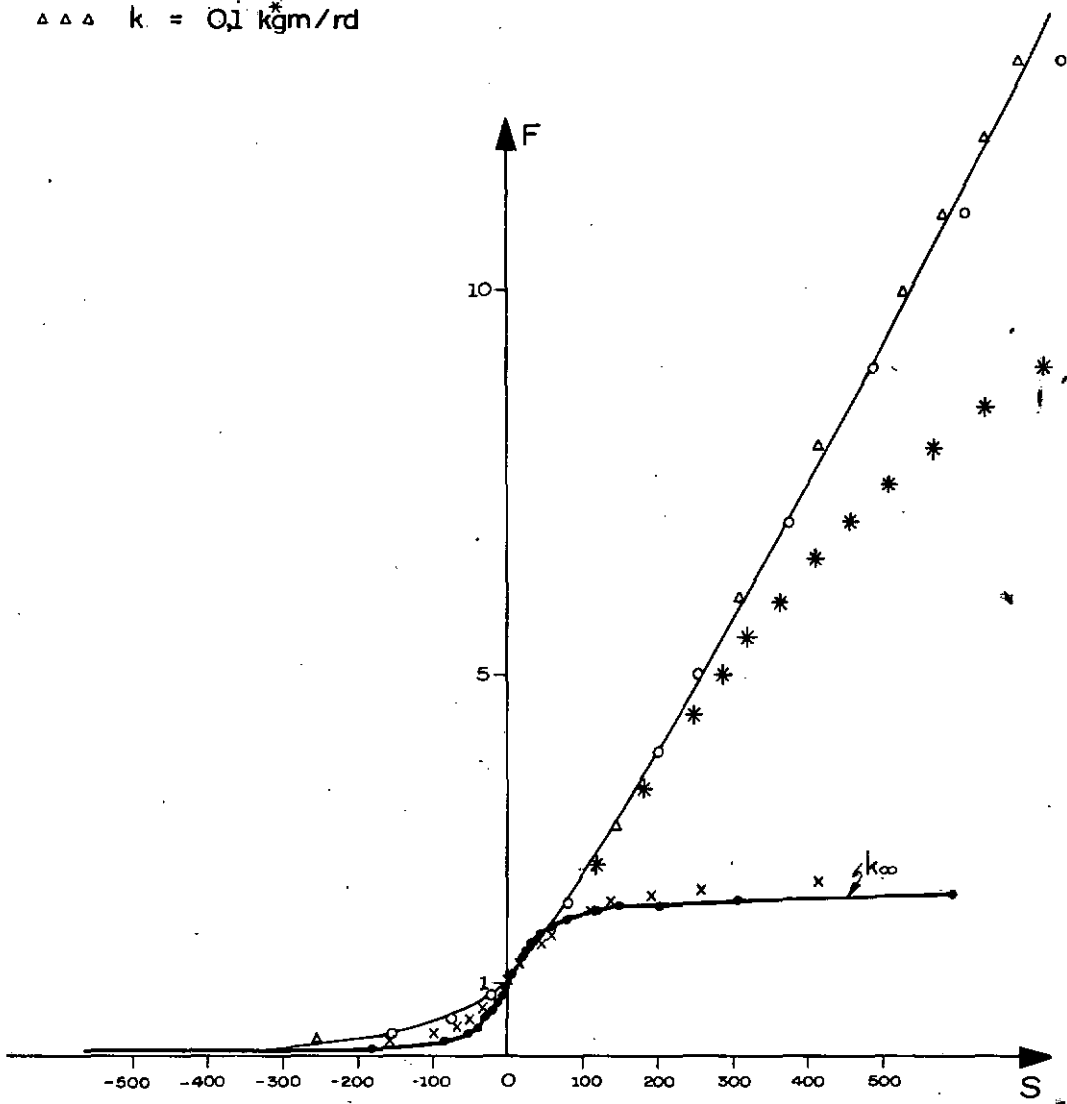


FIG. 30 - INFLUÊNCIA DA VARIAÇÃO DA CONSTATANTE DE MOLA DE TORÇÃO NA 1ª FREQUÊNCIA NATURAL.

da constante de mola de torção superiores a 10^5 kg*.m/rd, as curvas de primeira frequência natural independem do valor desta constante. Logo, valores desta ordem são suficientes para simular um engastamento rígido quanto às rotações de sua extremidade.

A medida que o valor da constante de mola de torção vai diminuindo, observamos que cresce acentuadamente a influência do efeito giroscópico (a mola armazena cada vez menos energia e a reação à variação angular do conjunto vai sendo progressivamente transferida para o volante).

Para valores suficientemente pequenos desta constante de mola, as curvas de primeira frequência natural convergem, o que já era esperado, pois pequenos valores desta constante se aproximarão de um apoio rotulado (livre para girar).

Analizando a Figura (31) percebemos que para valores suficientemente altos da constante de mola de torção as curvas de 2ª frequência natural convergem, o que já era um resultado esperado (simula um engastamento rígido quanto à rotação da extremidade).

Entretanto, para pequenos valores desta constante, tais curvas divergem de forma acentuada. O resultado esperado também era a acumulação destas curvas, pois, baixos valores da constante de mola simulam apoios rotulados, configuração física bem definida e portanto de resposta única. Esta distorção está ocorrendo porque os adimensionais de rotação $S = \Omega \sqrt{\alpha_{11} M}$ e de precessão $F = \omega \sqrt{\alpha_{11} M}$ não são adequados para permitir comparação de resultados onde ocorram alterações na elasticidade do sistema ou em sua massa.

Constantes de mola de torção :

- . . . k_{∞} - RÍGIDO
 x x x $k = 10^5 \text{ kgm/rd}$
 o o o $k = 10^4 \text{ kgm/rd}$
 Δ Δ Δ $k = 10^3 \text{ kgm/rd}$

Constante da mola linear :

$$K = 10^9 \text{ kg}^*/\text{m}$$

(\cong rígido)

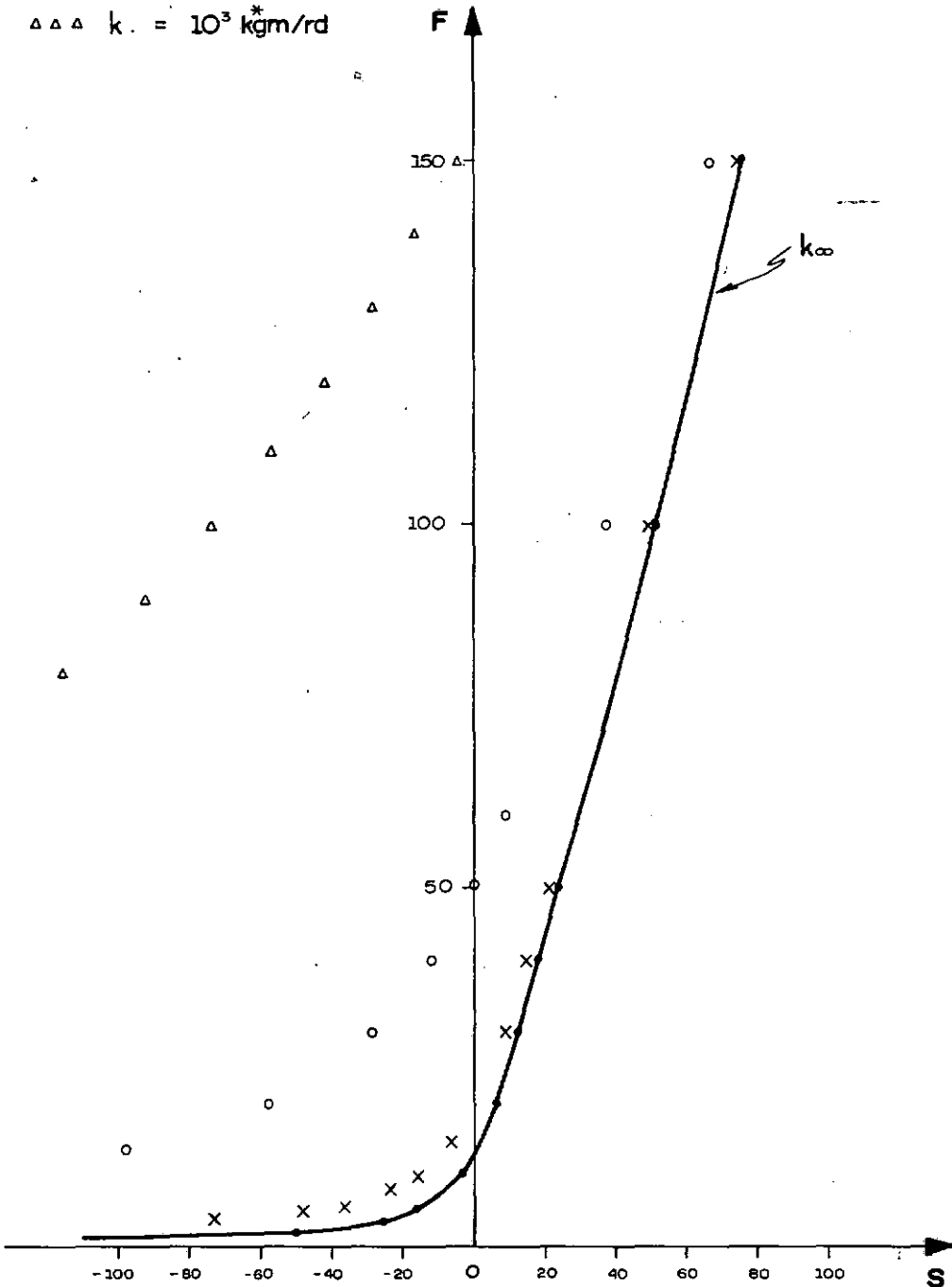


FIG. 31 - INFLUÊNCIA DA VARIAÇÃO DA CONSTATANTE DE MOLA DE TORÇÃO NA 2ª FREQUÊNCIA NATURAL.

6.1.3 - INFLUÊNCIA DA VARIAÇÃO DA ESPESSURA DO DISCO NAS CURVAS DE FREQUÊNCIA NATURAL - SUSPENSÃO RÍGIDA

A Figura (32) mostra que o crescimento da espessura do disco leva a maiores valores da curva adimensional de 1ª frequência natural.

Entretanto o comportamento esperado seria que os valores da 1ª frequência natural diminuíssem com este crescimento. Mais uma vez constatamos aqui uma distorção provocada pela inadequação dos adimensionais empregados.

Analizando a Figura (33) vemos que quando a rotação e a precessão têm o mesmo sentido, a curva adimensional de 2ª frequência natural assume valores ligeiramente inferiores quando cresce a espessura do disco, a partir de determinada velocidade de rotação.

6.2 - COMPARAÇÃO ENTRE OS RESULTADOS DOS MODELOS CONTÍNUO E DISCRETO

Neste item apresentamos, através da formulação contínua, o mesmo problema físico mostrado no item 6.1. Alteramos a cada rodada do computador a massa distribuída do eixo (variando a densidade sem modificar a rigidez), até que a mesma possa ser considerada desprezível. Neste ponto comparamos as curvas de frequência natural obtidas do modelo contínuo com aquelas obtidas da modelação discreta.

A Figura (34) mostra que a 1ª frequência natural fornecida pelo modelo discreto é uma boa aproximação do resultado obtido na solução do mesmo problema pelo método contínuo. Notamos ainda que a alteração da densidade do eixo modifica li

Espessuras do disco:

• • • $\lambda = 0,04 \text{ m}$

x x x $\lambda = 0,08 \text{ m}$

o o o $\lambda = 0,12 \text{ m}$

Δ Δ Δ $\lambda = 0,16 \text{ m}$

Suspensão rígida :
(engastamento)

$k \approx \infty$

$K \approx \infty$

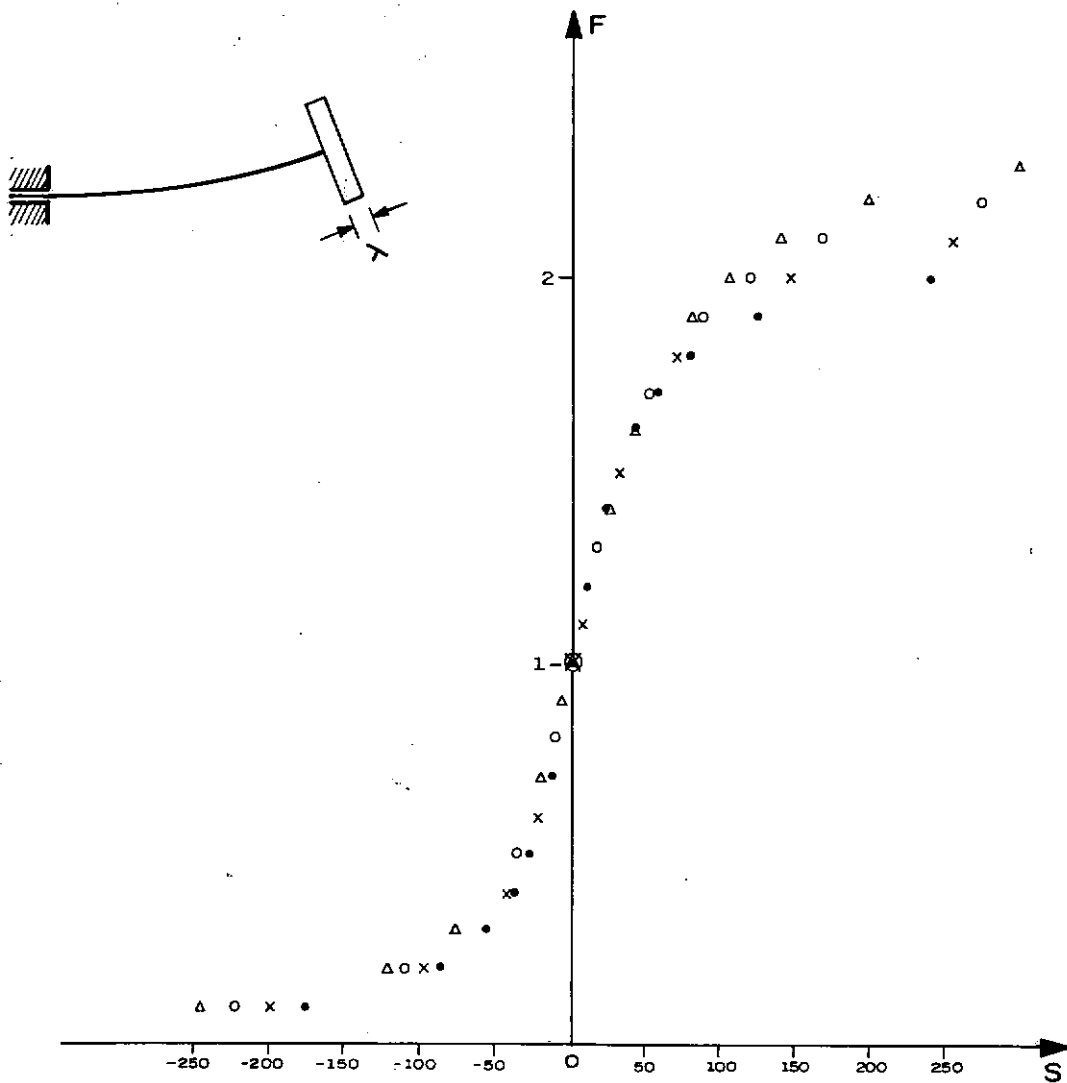


FIG. 32 - INFLUÊNCIA DA VARIAÇÃO DA ESPESSURA DO DISCO
NA 1ª FREQUÊNCIA NATURAL.

Espessuras do disco :

• • • $\lambda = 0,04 \text{ m}$

x x x $\lambda = 0,08 \text{ m}$

o o o $\lambda = 0,12 \text{ m}$

Suspensão rígida :
(engastamento)

$k \approx \infty$

$K \approx \infty$

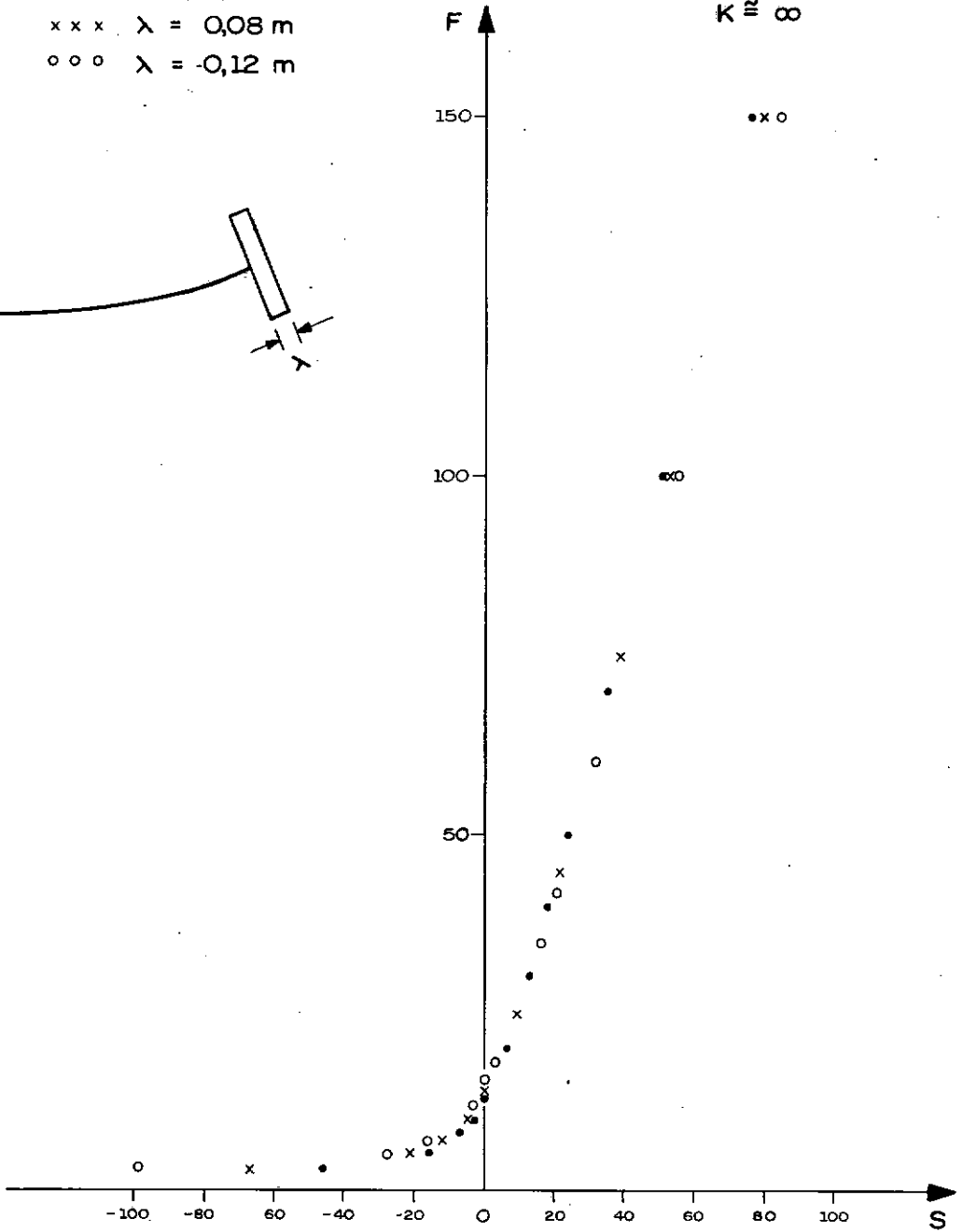
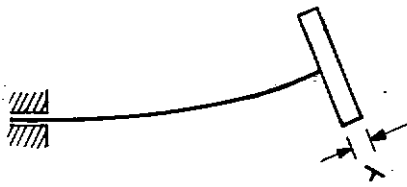
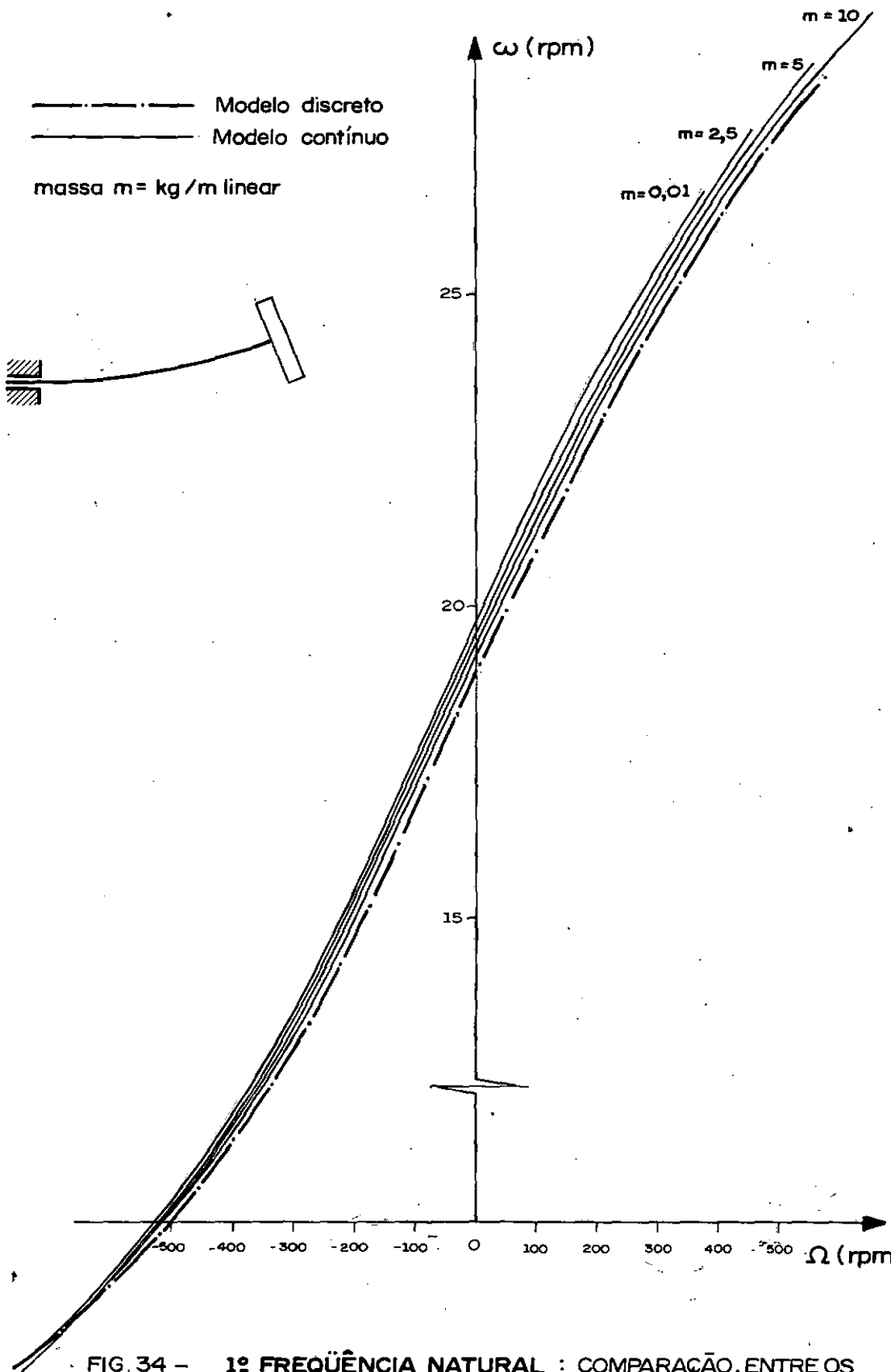


FIG. 33 - INFLUÊNCIA DA VARIAÇÃO DA ESPESSURA DO DISCO
NA 2ª FREQUÊNCIA NATURAL.



geiramente a curva de 1^a freqüência natural. Quanto menor a densidade do eixo, mais o resultado se afasta da modelação discreta, na qual o eixo é dotado de rigidez elástica sem contudo possuir massa, (isto ocorre porque a massa total do rotor não foi mantida constante).

Através da Figura (35) vemos que as curvas de 2^a freqüência natural obtidas da formulação discreta e da formulação contínua (para uma densidade desprezível do eixo) coincidem com uma suficiente aproximação).

Podemos ainda observar que à medida que a densidade do eixo cresce, perseguindo o seu valor real, a curva de 2^a freqüência natural obtida do modelo contínuo cai de forma acentuada, notoriamente, na região onde a rotação e a precessão têm o mesmo sentido.

Concluimos que o modelo discreto só representa bem o comportamento da 1^a freqüência natural. A massa do eixo é decisiva na simulação da 2^a freqüência natural. O modelo discreto só fornece bons resultados para eixos relativamente leves quando comparados com o disco.

6.3 - INFLUÊNCIA DA VARIAÇÃO DOS PARÂMETROS GEOMÉTRICOS NAS CURVAS DE FREQUÊNCIA NATURAL DE UM ROTOR EM BALANÇO - MODELO CONTÍNUO

6.3.1 - INFLUÊNCIA DA VARIAÇÃO DO DIÂMETRO DO DISCO - SUSPENSÃO RÍGIDA

As curvas (36), (37) e (38), relativas à 1^a, 2^a e 3^a freqüências naturais, respectivamente, mostram que existe uma forte influência do diâmetro nas curvas de freqüência natural.

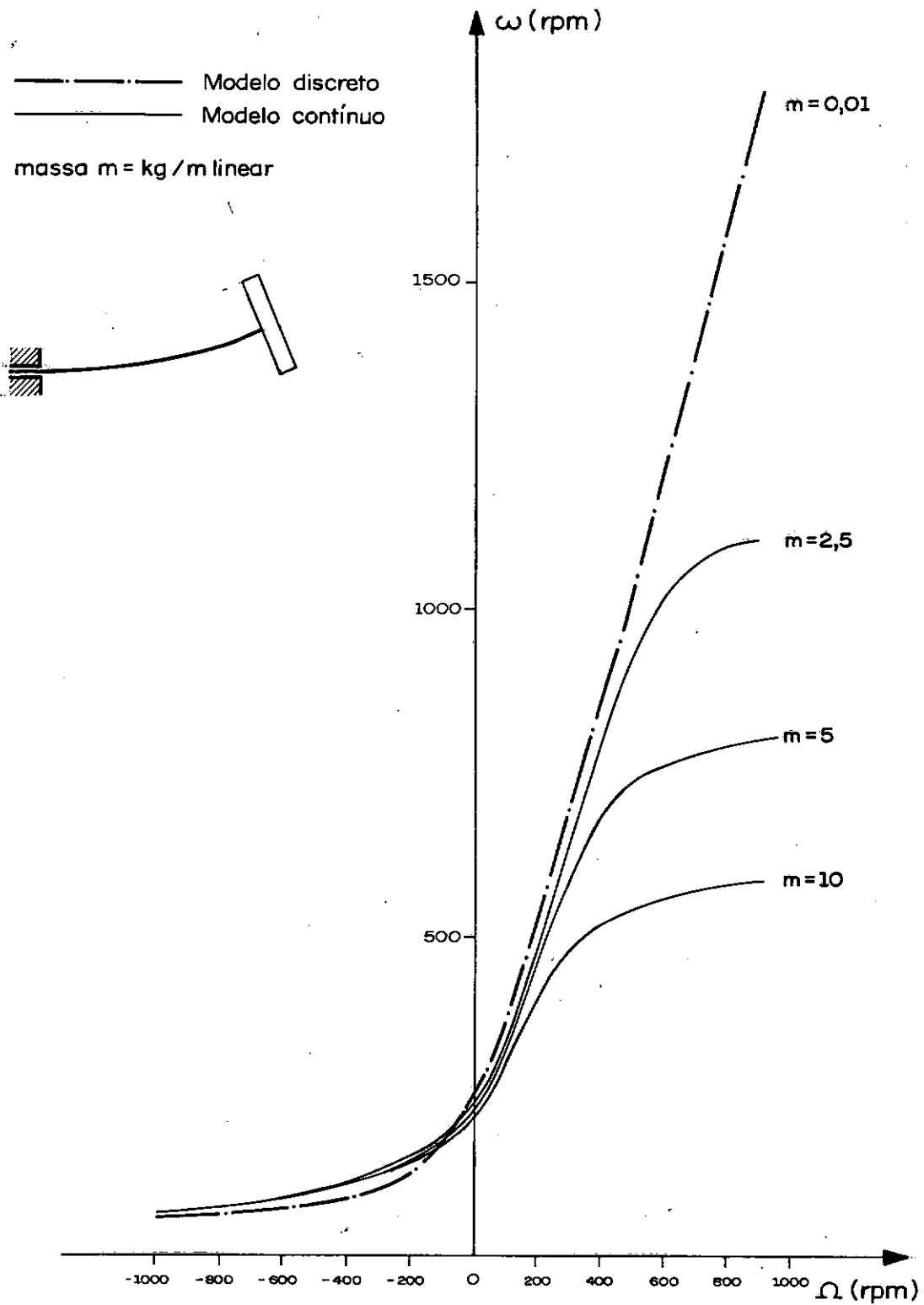


FIG. 35 - 2ª FREQUÊNCIA NATURAL : COMPARAÇÃO, ENTRE OS MODELOS DISCRETO E CONTÍNUO PARA VÁRIAS DISTRIBUIÇÕES DE MASSA DO EIXO.

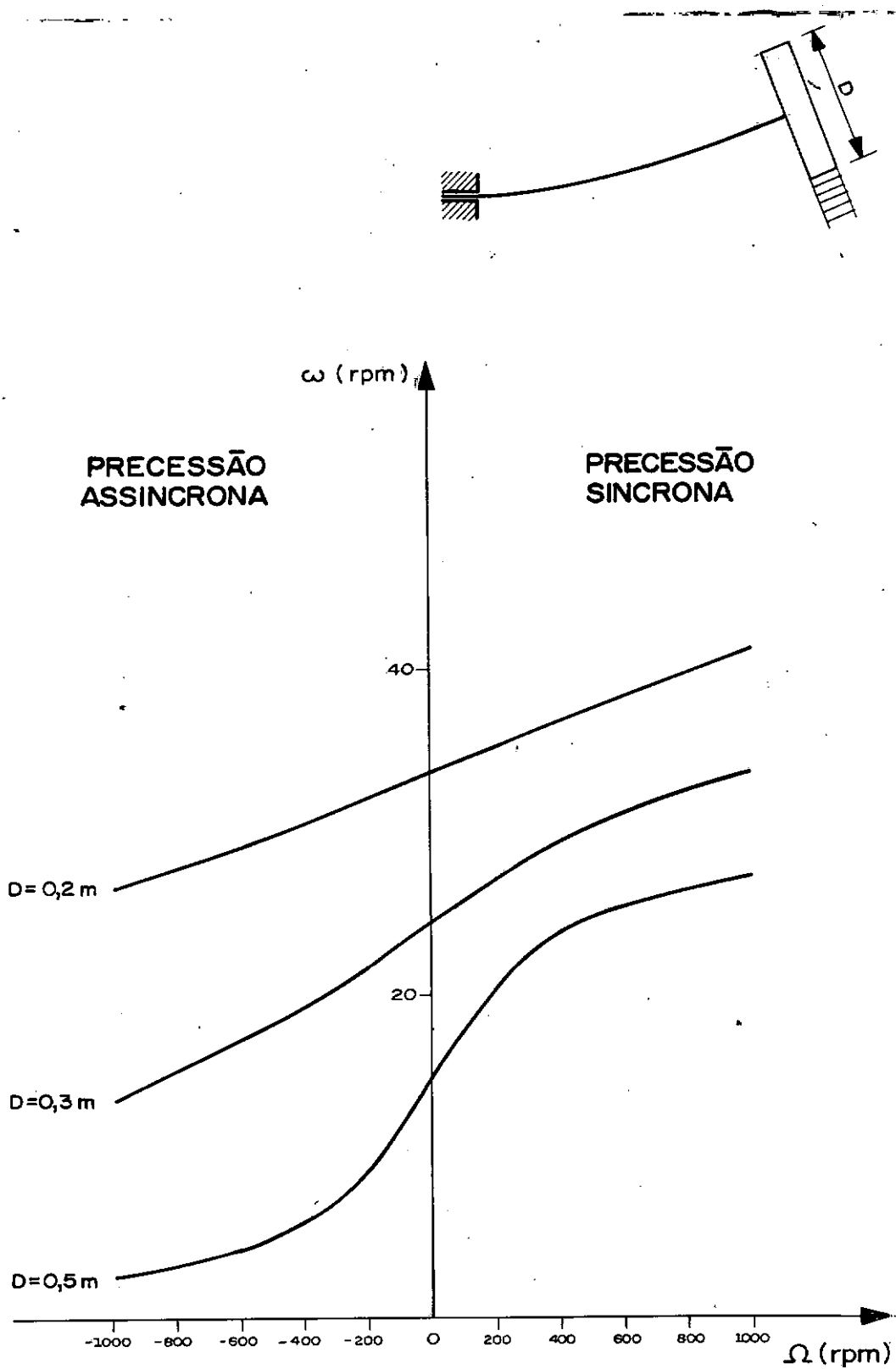


FIG. 36 - 1ª FREQUÊNCIA NATURAL : VARIAÇÃO DO DIÂMETRO DO DISCO - ROTOR EM BALANÇO.

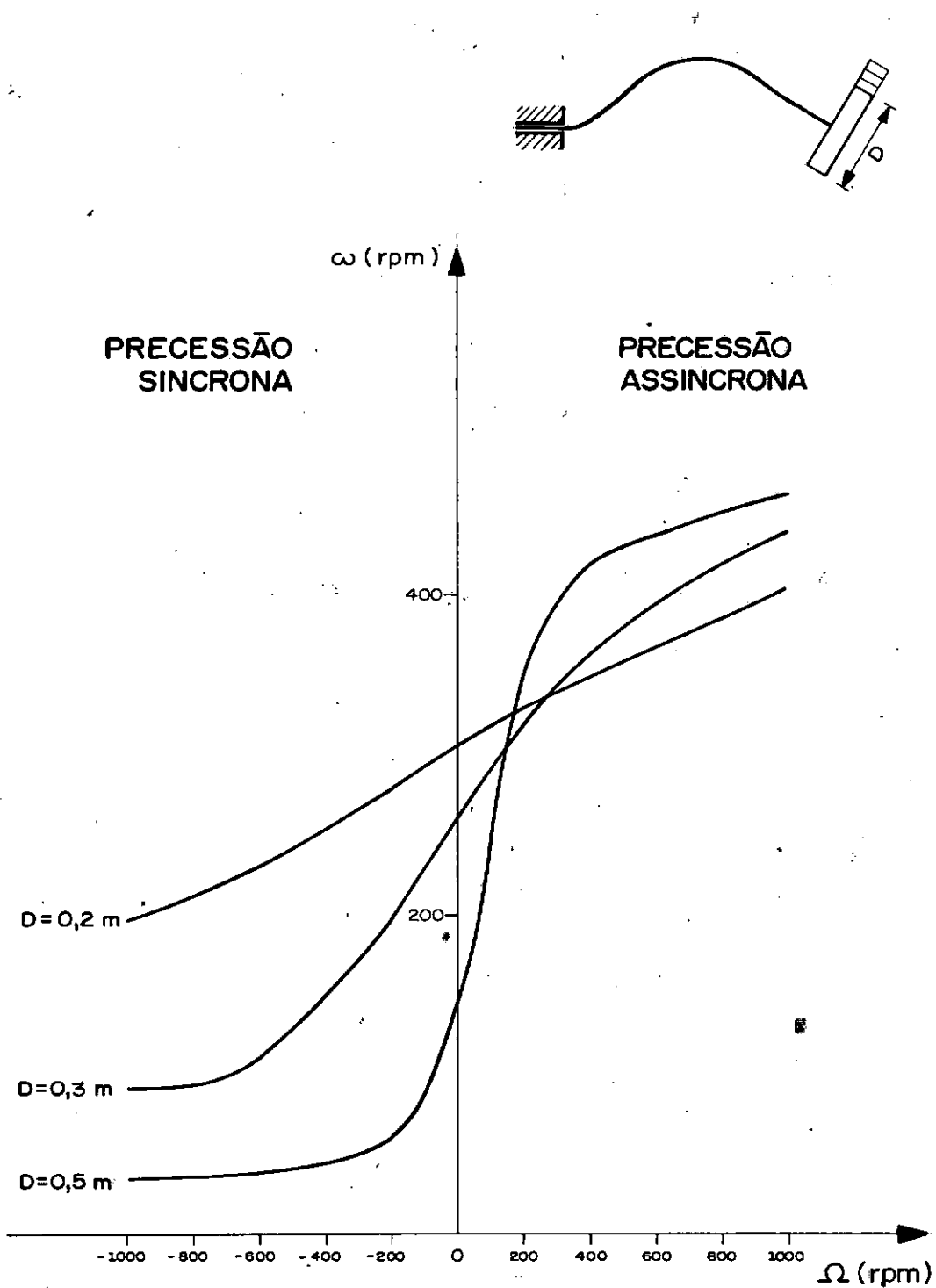


FIG. 37 - 2ª FREQUÊNCIA NATURAL : VARIAÇÃO DO DIÂMETRO DO DISCO - ROTOR EM BALANÇO.

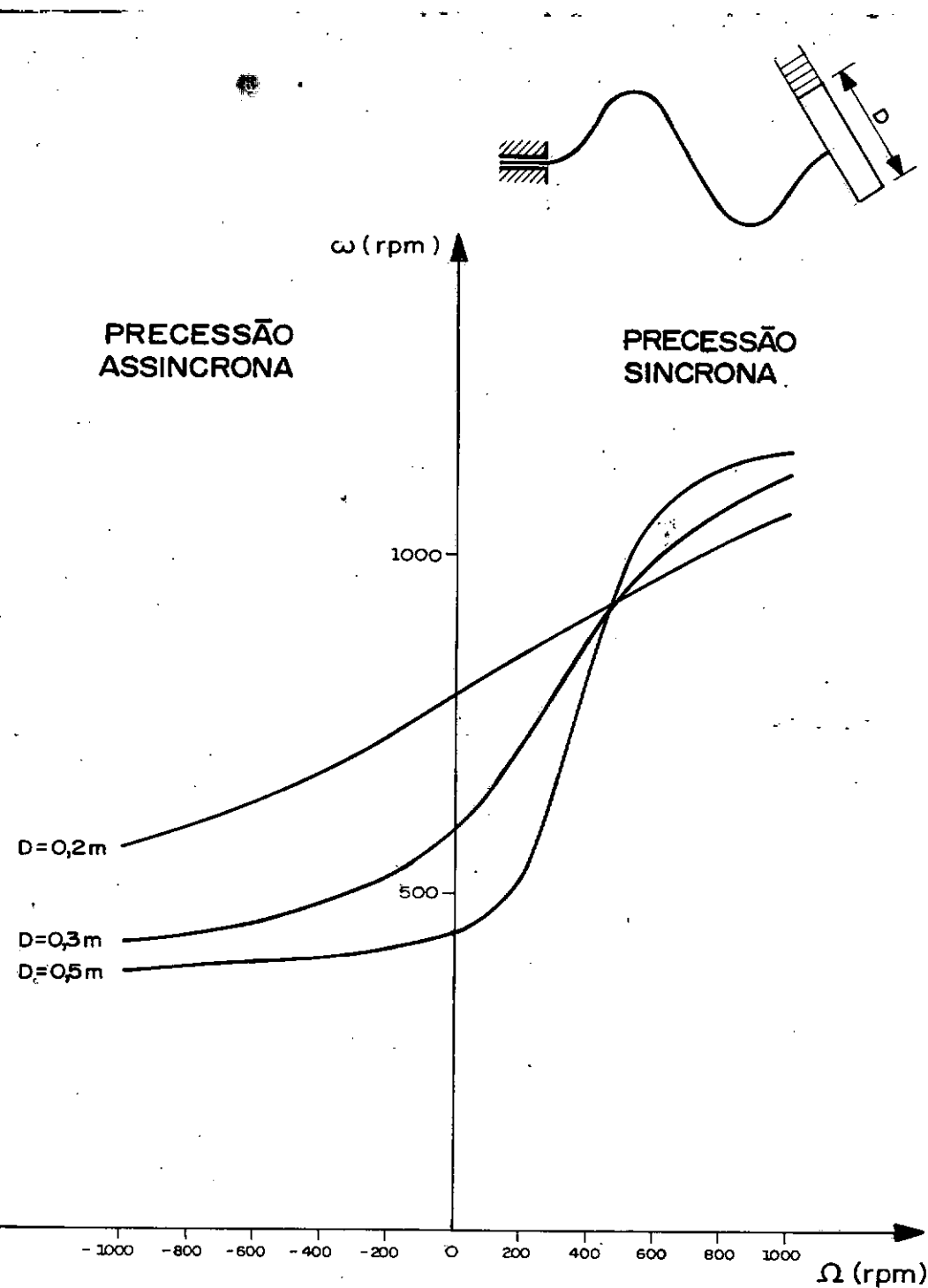


FIG. 38 - 3ª FREQUÊNCIA NATURAL : VARIAÇÃO DO DIÂMETRO DO DISCO - ROTOR EM BALANÇO.

O crescimento do diâmetro aumenta a massa do disco e em consequência cai o valor da frequência natural, para uma velocidade de rotação nula.

O aumento do diâmetro provoca ainda um fortalecimento da atuação do efeito giroscópico. Isto pode ser percebido, em todas as curvas de frequência natural apresentadas, pela acentuada diferença das frequências nas precessões síncronas e assíncronas.

Poderemos ainda observar nas Figuras (36), (37) e (38) as curvas de 1ª, 2ª e 3ª modos normais, respectivamente, desenhadas para uma rotação $\Omega = 1000$ rpm.

6.3.2 - INFLUÊNCIA DA VARIAÇÃO DO COMPRIMENTO DO EIXO

Observando as Figuras (39), (40) e (41) relativas à 1ª, 2ª e 3ª frequências naturais, respectivamente, vemos que a diminuição do comprimento do eixo enrijece o sistema, o que é um resultado esperado, aumentando as frequências naturais.

Um enrijecimento de igual natureza pode ser conseguido pelo aumento do diâmetro do eixo, permanecendo constante o seu comprimento. Note-se que um ou outro caso equivale a aumentar a relação (rigidez do eixo)/(massa do disco).

6.3.3 - MODOS NORMAIS DE VIBRAÇÃO

Na Figura (42) podemos observar a forma que a elástica assume nos três primeiros modos normais de vibração para dois valores distintos da velocidade de rotação, tais que: $\Omega = -1000$ rpm e $\Omega = 1000$ rpm.

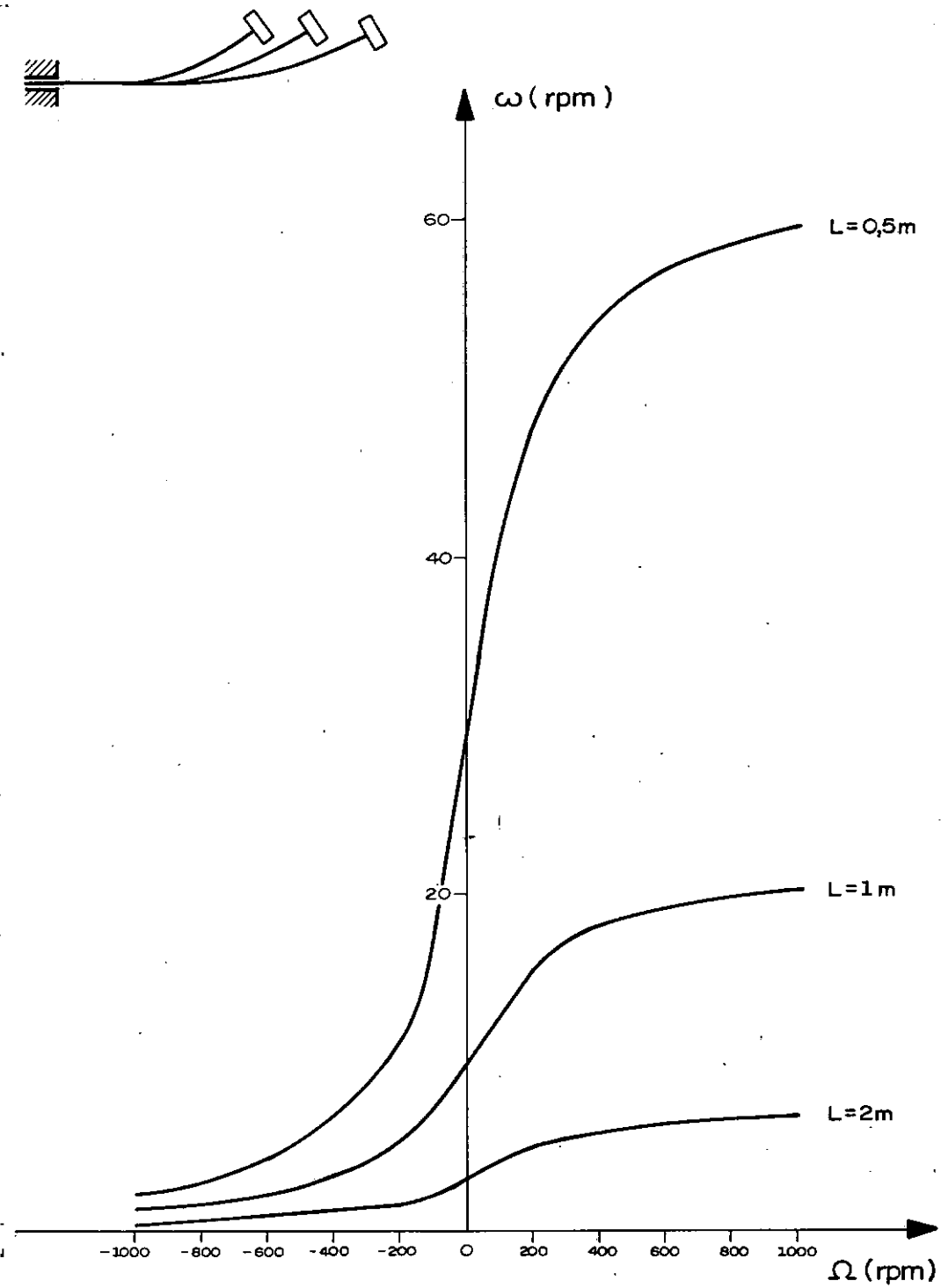


FIG. 39 - 1ª FREQUÊNCIA NATURAL : VARIAÇÃO DO COMPRIMENTO DO EIXO - ROTOR EM BALANÇO.

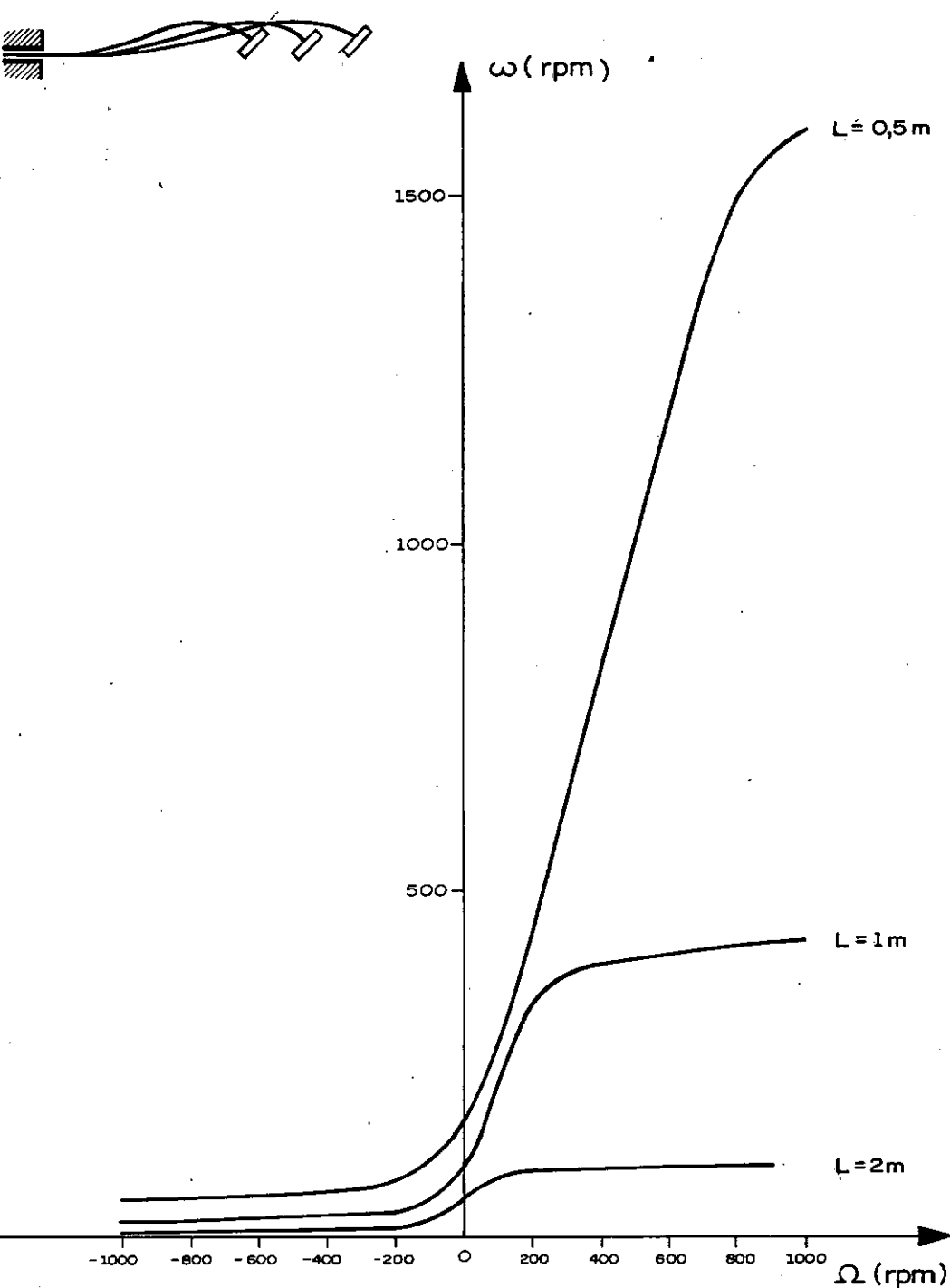


FIG. 40 - 2ª FREQUÊNCIA NATURAL : VARIACÃO DO COMPRIMENTO DO EIXO - ROTOR EM BALANÇO.

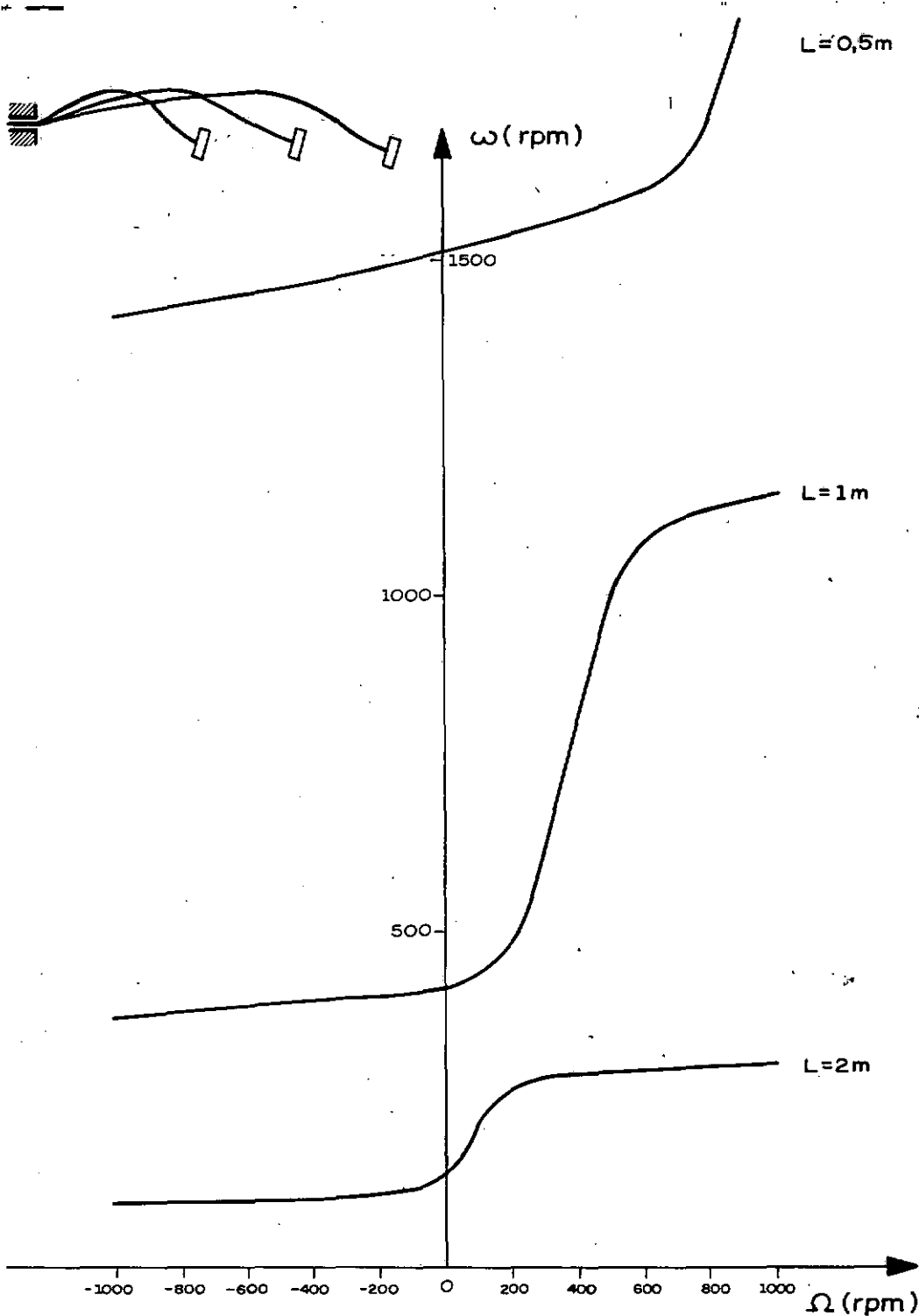


FIG. 41 - 3ª FREQUÊNCIA NATURAL : VARIAÇÃO DO COMPRIMENTO DO EIXO - ROTOR EM BALANÇO.

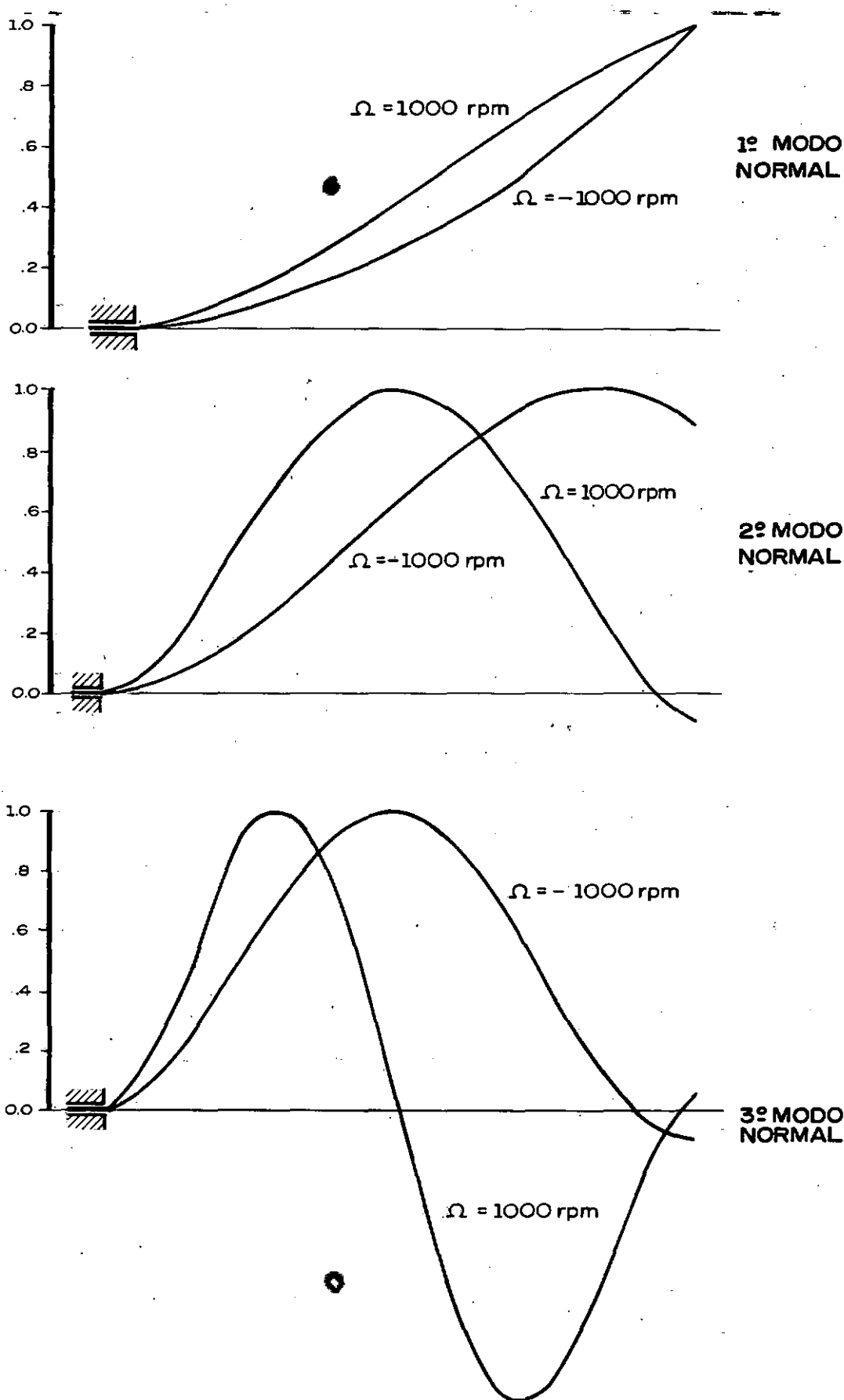


FIG. 42- VARIAÇÃO DOS MODOS NORMAIS DE VIBRAÇÃO COM ROTAÇÃO Ω .

6.4 - INFLUÊNCIA DA VARIAÇÃO DOS PARÂMETROS GEOMÉTRICOS NAS CURVAS DE FREQUÊNCIA NATURAL DE UM ROTOR BIAPOIADO - MODELO CONTÍNUO

6.4.1 - INFLUÊNCIA DA VARIAÇÃO DO DIÂMETRO DO DISCO NAS CURVAS DE FREQUÊNCIA NATURAL

O modelo físico tomado como base para a discussão dos resultados, tem as seguintes características:

ROTOR BIAPOIADO COM APOIOS ROTULADOS

Diâmetro do eixo	= 0,05 m
Comprimento do eixo	= 1,0 m
Disco localizado no centro do eixo	
Material do eixo	= aço

Pelas Figuras (43), (44) e (45) vemos que a 1ª e a 3ª frequências naturais sofrem pouca influência do efeito giroscópico. Isto ocorre porque no 1º e 3º modos normais de vibração, o disco, localizado no meio do eixo, não sofre mudança de direção em seu eixo de rotação. Já nas curvas de 2ª frequência natural percebemos que o aumento do diâmetro do disco acentua a atuação do efeito giroscópico, pois no 2º modo normal o disco sofre mudança de orientação.

Podemos ainda dizer que para velocidades de rotação iguais a zero, o aumento do diâmetro do disco baixa o valor de todas as frequências naturais.

Podemos ainda observar nas Figuras (43), (44) e (45) as curvas de 1º, 2º e 3º modos normais de vibração, respectivamente desenhados para a rotação $\Omega = 500$ rpm.

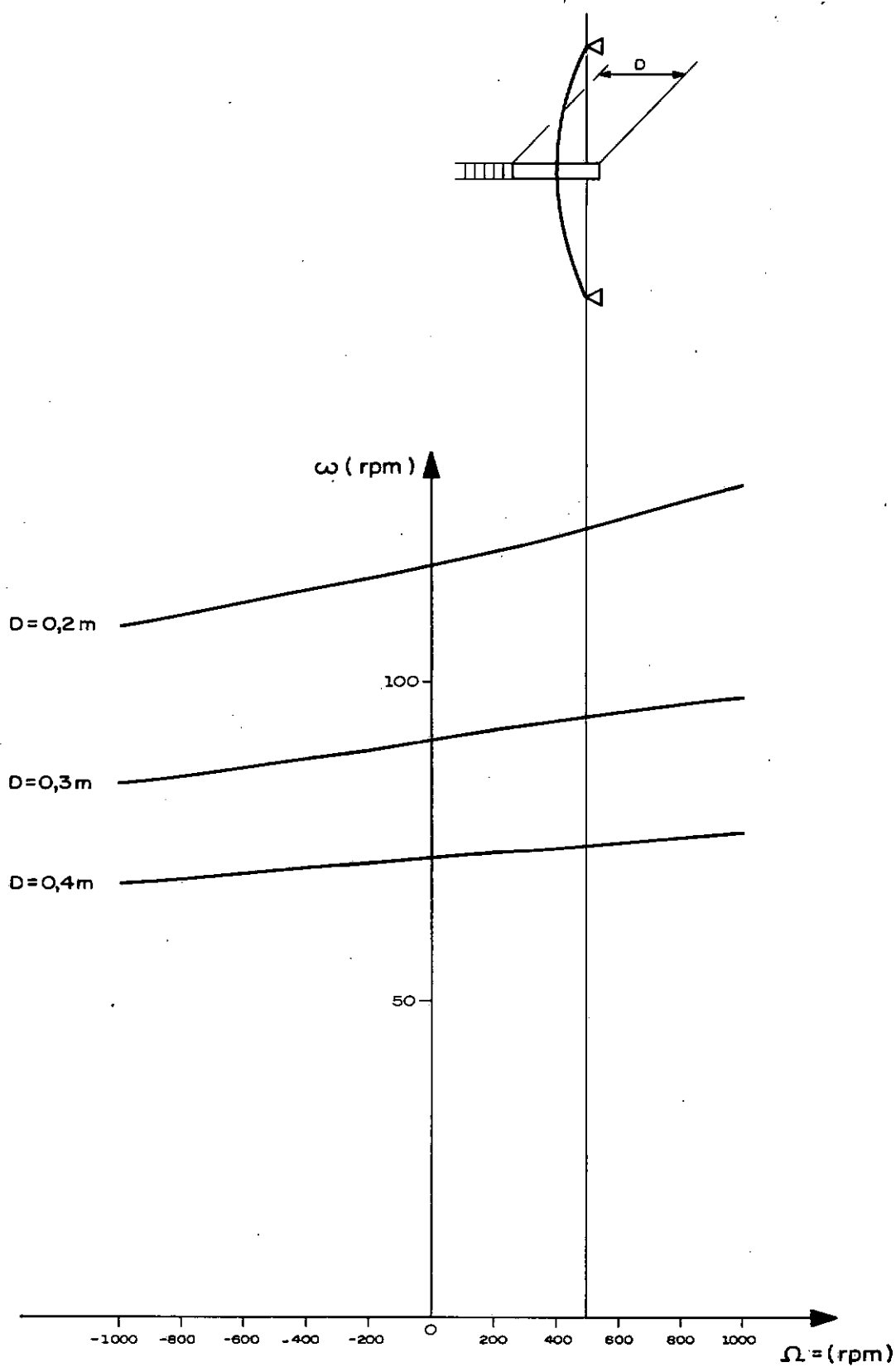


FIG. 43 - 1ª FREQUÊNCIA NATURAL : VARIAÇÃO DO DIÂMETRO DO DISCO - ROTOR BIAPOIADO.

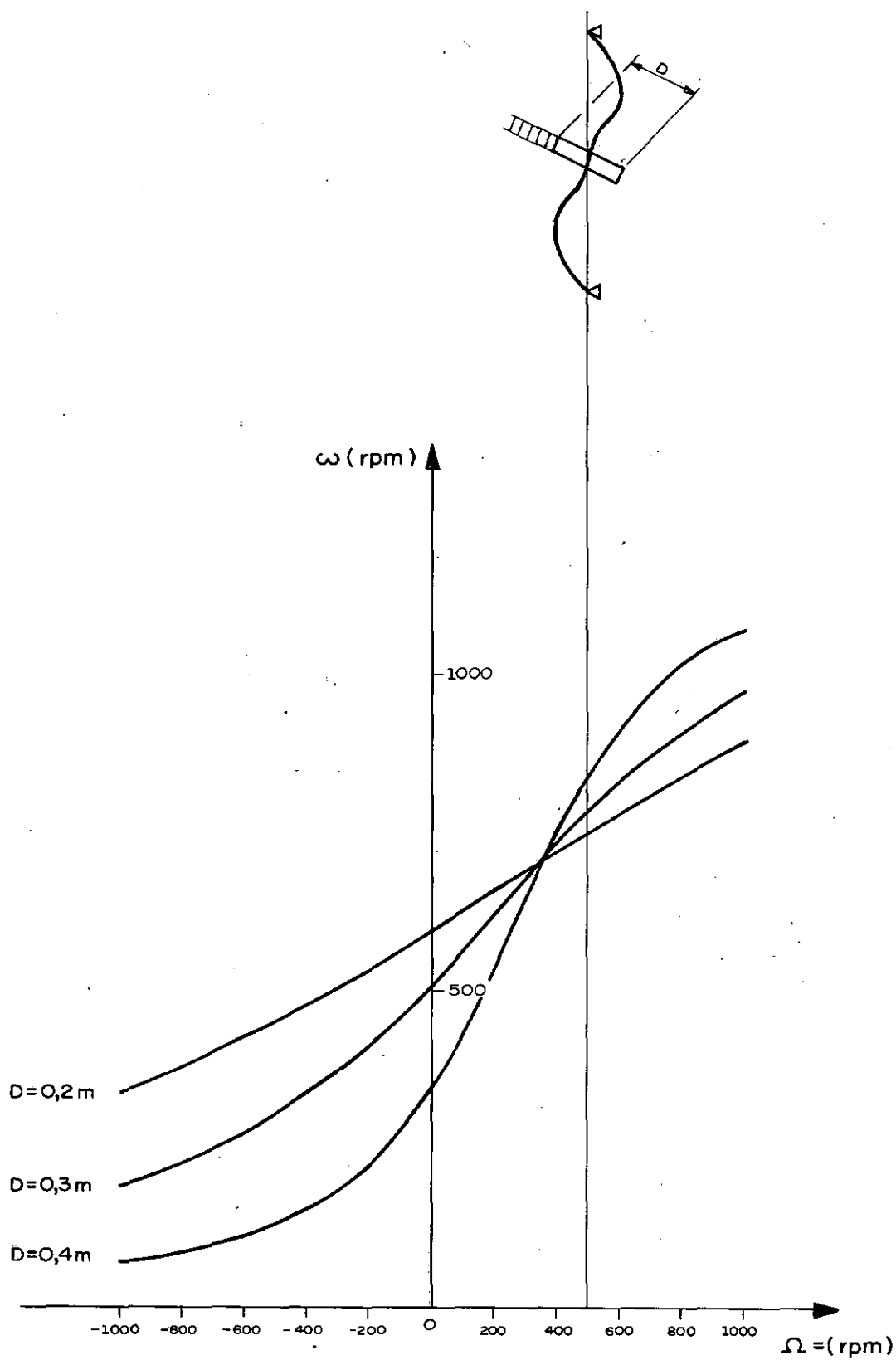


FIG. 44 - **22** FREQUÊNCIA NATURAL : VARIAÇÃO DO DIÂMETRO DO DISCO - ROTOR BIAPOIADO.

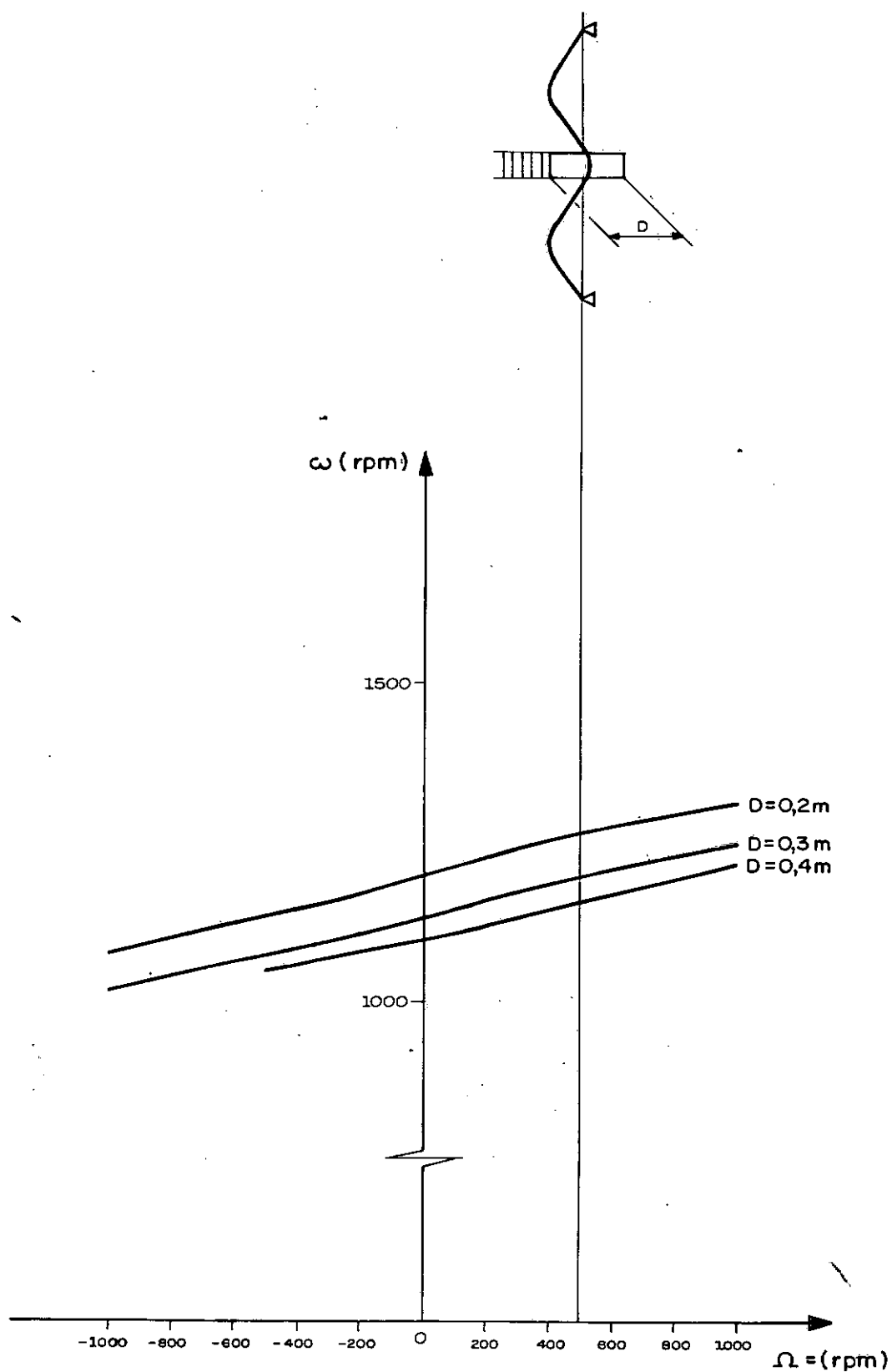


FIG. 45 - 3ª FREQUÊNCIA NATURAL : VARIAÇÃO DO DIÂMETRO DO DISCO - ROTOR BIAPOIADO.

6.4.2 - INFLUÊNCIA DA VARIAÇÃO DA POSIÇÃO DO DISCO NAS CURVAS DE FREQUÊNCIA NATURAL

Imaginemos um rotor biapoiado de características físicas e geométricas semelhantes às apresentadas no item 6.4.1.

Façamos variar a posição do disco ao longo do eixo.

A Figura (46) mostra que as curvas de 1^a frequência natural acusam uma perda de rigidez do sistema quando o disco se desloca de uma extremidade para o centro (rotação e precessão no mesmo sentido). O efeito giroscópico se faz mais presente para o disco próximo à extremidade do eixo, onde a tangente é máxima; ao contrário, no centro a tangente é nula.

A Figura (47) mostra que para as 2^{as} frequências naturais o fenômeno se processa de forma inversa, o conjunto fica mais rígido à medida que se caminha para o centro.

A Figura (48) mostra como evoluem as curvas de frequência natural para o terceiro modo normal de vibração, quando variamos a posição do disco.

Observando ainda as Figuras (46), (47) e (48) poderemos ver como variam as curvas elásticas do rotor, para o 1º, 2º e 3º modos normais, respectivamente, quando alteramos a posição do disco.

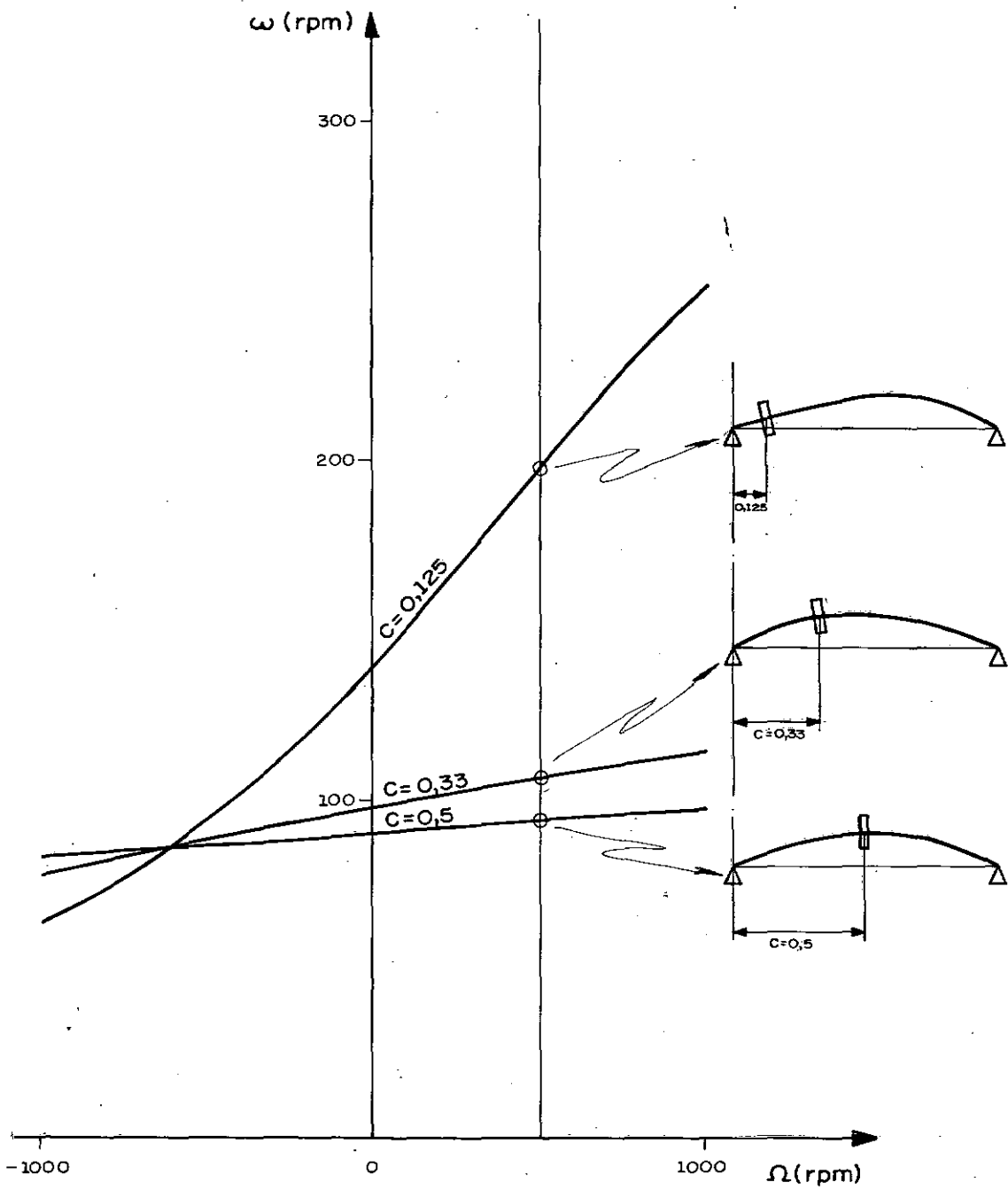


FIG.46-1^o FREQUÊNCIA NATURAL : VARIAÇÃO DA POSIÇÃO DO DISCO.
— ROTOR BIAPOIADO.

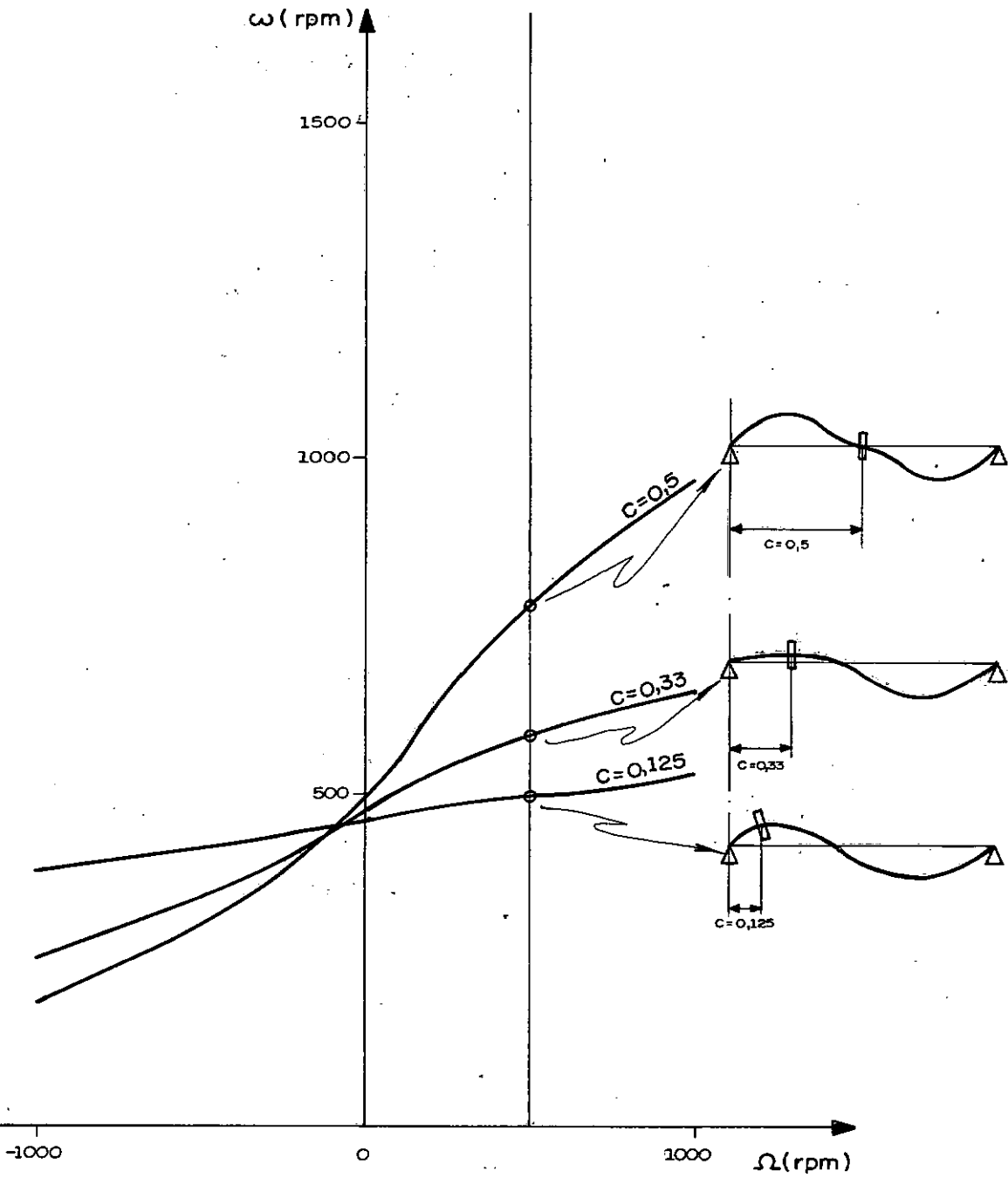


FIG. 47 - 2ª FREQUÊNCIA NATURAL : VARIAÇÃO DA POSIÇÃO DO DISCO
— ROTOR BIAPOIADO.

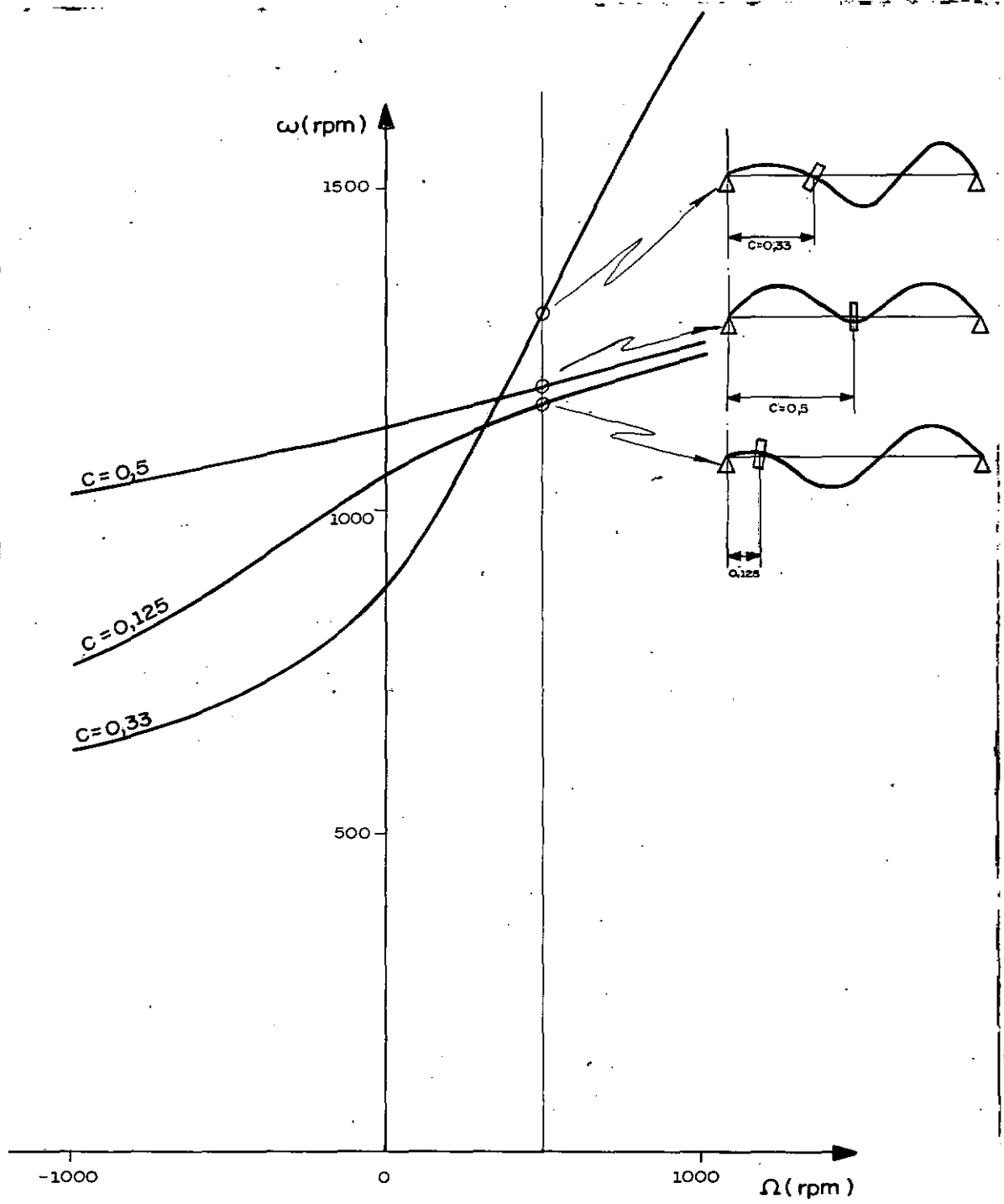


FIG. 48 - 3ª FREQUÊNCIA NATURAL : VARIAÇÃO DA POSIÇÃO DO DISCO.
— ROTOR BIAPOIADO.

VII - CONCLUSÃO

Para efeitos práticos, o coeficiente de mola po de permanecer entre 2 limites: superior e inferior. Existem valores da constante de mola linear acima dos quais o sistema se comporta como rigidamente engastado. O mesmo ocorre para valores suficientemente altos da mola de torção. Para valores suficientemente baixos das constantes de mola linear e de torção o sistema se comporta como livre.

O modelo discreto com dois graus de liberdade, apresentado no capítulo III, fornece um bom resultado quando estamos interessados nos valores da 1^a freqüência natural. A massa do eixo é decisiva para se obter uma boa simulação da segunda freqüência natural. O modelo discreto, portanto, só dará bons resultados no cálculo da segunda freqüência natural para eixos suficientemente leves.

Os modelos apresentados nos capítulos IV e V - modelos contínuos - mostraram-se adequados, uma vez que sua capacidade de simulação dos parâmetros físicos e geométricos é ampla.

Quando se aumenta o diâmetro do disco, podemos ter dois tipos de comportamento do rotor: a) quando o efeito giroscópico não for mandatório, o aumento do disco só adiciona massa ao sistema e as freqüências naturais diminuem em toda a faixa de rotação estudada; b) onde o efeito giroscópico for preponderante, as freqüências naturais aumentam, na faixa de precessão síncrona.

Aumentando-se o comprimento do eixo, percebemos que o sistema fica mais flexível, ocasionando menores freqüên-

cias de vibração.

No caso do rotor biapoiado, vemos que a alteração da posição relativa do disco, no eixo, leva ao enrigecimento do sistema, sempre que o efeito giroscópico se torna importante. O sistema se oporá a mudanças de orientação do eixo polar do disco.

Em resumo podemos assegurar que as frequências naturais de vibração de um conjunto rotor são sensíveis a variações da rotação e da geometria do conjunto.

Possíveis extensões deste trabalho podem incluir:

- 1) apoio elásticos para o rotor com disco em posição intermediária;
- 2) consideração da espessura do disco;
- 3) rotor com trechos de diâmetros diferentes;
- 4) coeficientes de mola linear e de torção diferentes nos dois planos;
- 5) simulação por elemento finito, para termo de comparação com os presentes resultados.

VIII - BIBLIOGRAFIA

- 1 - RANKINE, W.J.M. On the centrifugal forces of rotating shafts. Engineer, Ap. 1869.
- 2 - RAYLEIGH, Lord. Theory of sound. New York, Dover Publ., 1945.
- 3 - TIMOSHENKO, T. Collected papers. New York, Mc Graw - Hill Book, 1945. p. XI.
- 4 - JEFFCOT, H.H. The lateral vibration of loaded shaft in the neighboahood of a whirling speed - the effect of want of balance. Philos. Mag. 37, 1919.
- 5 - SOUTHWELL, R.V. & GOUGH, B.S. Complex stress distributions in engineering materials. London, Brit. Ass. Adv. Sci., 1921. p. 345. (Report).
- 6 - HOLZER, H. Die berechnung der drehschwingungen. Berlin, Springer-Verlag OHG, 1921.
- 7 - STODOLA, A. Kritische wellenstörung infolge nachgiebigkeit des oelpoisters im lager. Schweiz. Bauzg. 1925. p. 265.
- 8 - PROHL, M.A. A general method for calculating critical speeds of flexible rotors. J. Appl. Mech. 12(3): A 142 - A 148. Sept. 1945.
- 9 - SMITH, D.M. The motion of a rotor carried by a flexible shaft in flexible bearing. Proc, R. Soc. London Ser.A, 142: 92. 1933.
- 10 - GREEN, R.B. Girosopic effects on the critical speeds of flexible rotors. Trans. ASME, 70: 369 - 76, 1958.
- 11 - MILLER, D.F. Forced lateral vibration of beams on damped flexible end supports. J. Appl. Mech. 20: 167 - 172, 1953.

- 12 - URBAN, R.L. Extension of Holzer - Myklestad - Prohl - calculation of turborotors critical speeds. New York, ASME, s.d. (ASME Paper 58 - A - 246).
- 13 - TONDL, A. Der Einfluss der elastischen Fundamentlagerung auf die durch Einwirkung, des Olfilms der Gleitlager verursachten, selbsterregten Rotor-schwingungen. Rev. Mech. Appl. 3, 1961.
- 14 - BILLET, R.A. Effects of symmetrical nonlinear bearing flexibility of shaft whirl. J. Mech. Eng. Sci. 8: 234 - 240, 1966.
- 15 - LUND, J.W. & CREUTT, F.D. Calculations and experimentals on the unbalance response of a flexible rotor. J. Eng. Ind. 89(4) 1967.
- 16 - ESHLEMAN, R.L. & EUBANKS, R.A. On the critical speeds of a continuous rotor. J. Eng. Ind. 91 (48): 1180 - 1188, Nov. 1969.
- 17 - RAUL, R.L. Dynamics of distributed parameter rotor systems; transfer matrix and finite element techniques. Cornell Univ., 1970. (Ph.D. Thesis).
- 18 - THOMSON, W.T. Whirl stability of the pendulously supported flywheel systems. Trans. ASME, Jun. 1977. p. 322 - 328.
- 19 - GREENWOOD, D.T. Principles of dynamics. N.J., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1965.
- 20 - DEN HARTOG, J.P. Mechanical vibrations. e. ed. New York, Mc Graw Hill Book; N.J., Englewood Cliffs, 1965.
- 21 - TIMOSHENKO, S. & YOUNG, D.H. Vibration problems in engineering. 3. ed. Princeton, N.J., D. Van Nost and Co., 1955 p. 468 p.
- 22 - HABERMAN, C.M. Engineering systems analysis. Columbus, Oh., Charles & Merrill Books, 1965. 318 p.
- 23 - ESHLEMAN, R.L. Flexible rotor - bearing system dynamics. I - Critical speeds and response of flexible rotor systems. New York, ASME, S. d.

- 24 - SOUTHWORTH, R.W. & DELEEV, S.L. Digital computation and numerical methods. New York, Mc Graw - Hill Book Co., 1965. 508 p.
- 25 - YU CHEN. Vibrations: theoretical methods. Keacling, Addison - Wesley Publ. Co., 1966. 285 p.
- 26 - CHIVENS, D.R. The natural frequencies and critical speeds of a rotating, flexible shaft-disk system. Tempe, AZ, Arizona State Univ., 1973. 154 p. (Ph.D. Thesis).
- 27 - NOWACKI, W. Dynamics of elastic systems. London, Chapman & Hall Ltd., 1963. 396 p.
- 28 - SPIEGEL, M.R. Shaum's Outline of theory and problems of Laplace transforms. New York, Mc Graw - Hill Book Co., 1965. 261 p. (Shaum's Outline series).
- 29 - HILDEBRAND, F.B. Advanced calculus for applications. Englewood Cliffs, N. J., Prentice-Hall, 1965. 646 p.
- 30 - CARSLAW, H.S. & JEAGER, J.C. Operational methods in applied mathematics. New York, Dover Publ., 1947. Cap. 11.

APÊNDICE A

PROPRIEDADES DAS FUNÇÕES PULSO UNITÁRIO E BINÁRIO UNITÁRIO

No capítulo V usamos as funções pulso e binário para introduzir o disco diretamente na equação diferencial do rotor. Relacionamos abaixo algumas definições e propriedades destas funções [29], [30], ver Figuras (A.1) e (A.2).

1. Função degrau unitário:

$$u(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

2. Função pulso unitário (delta de Dirac):

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & 0 > x > \epsilon \\ \frac{1}{\epsilon}, & 0 \leq x \leq \epsilon \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$$

definida no limite, quando $\epsilon \rightarrow 0$.

3. Derivada da "função" degrau unitário:

$$u'(x) = \delta(x). \quad (\text{A.3})$$

4. Translação da "função" pulso unitário:

$$\delta(x - c) = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & c > x > c + \epsilon \\ \frac{1}{\epsilon}, & c \leq x \leq c + \epsilon \end{array} \right\} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \quad (\text{A.4})$$

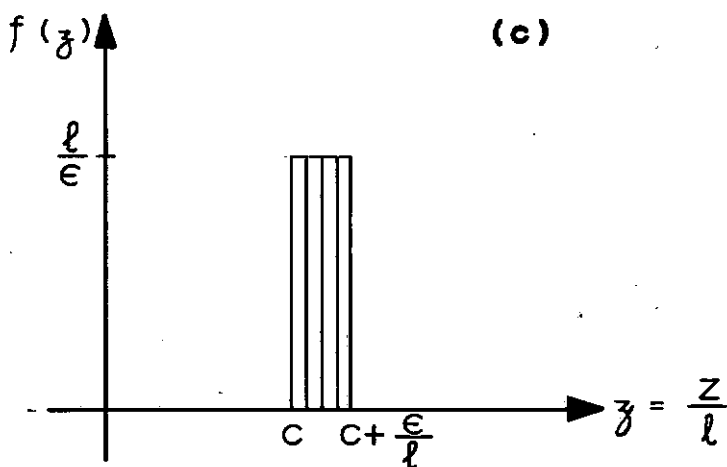
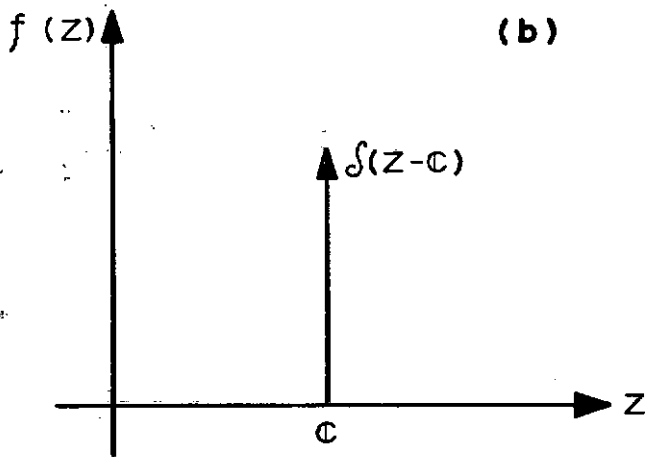
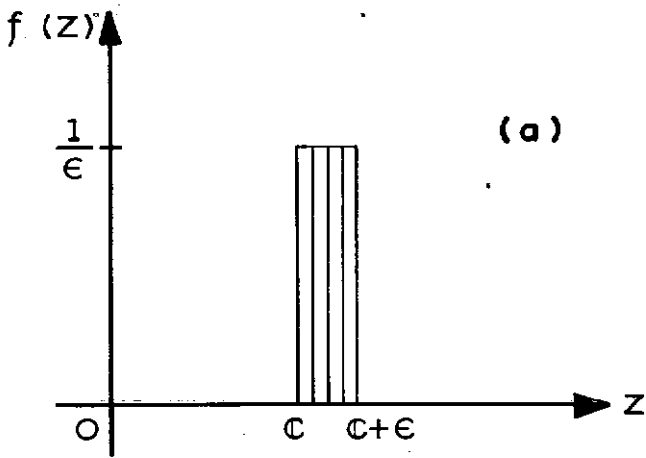


FIG.(A-1) -- REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DA FUNÇÃO PULSO UNITÁRIO.

(a) - GERAÇÃO DE FUNÇÃO PULSO, DIMENSIONAL.

(b) - FUNÇÃO PULSO

(c) - GERAÇÃO DA FUNÇÃO PULSO, ADIMENSIONAL.

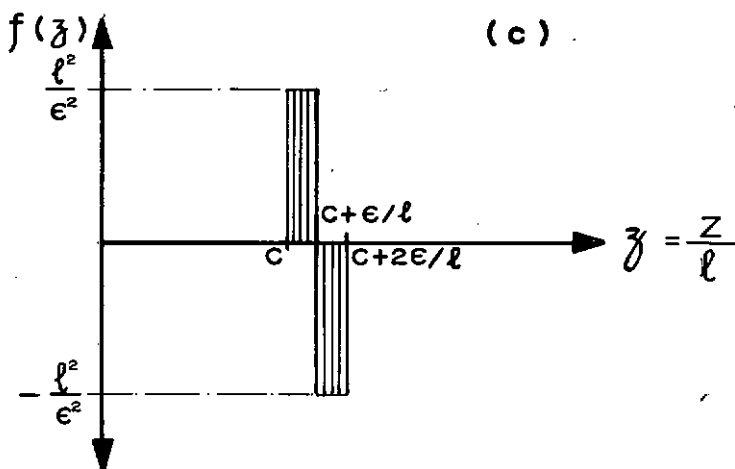
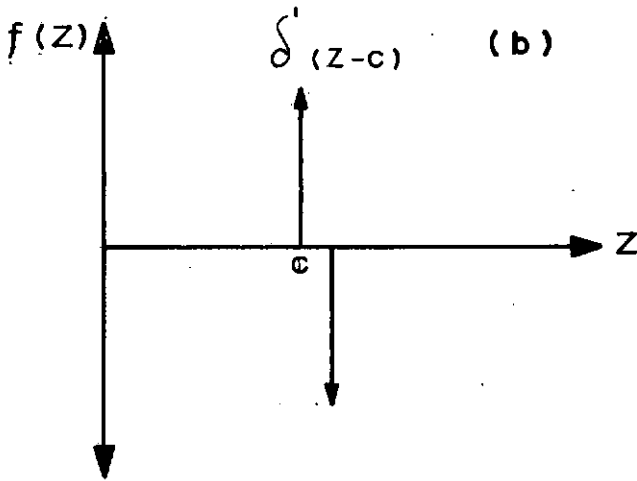
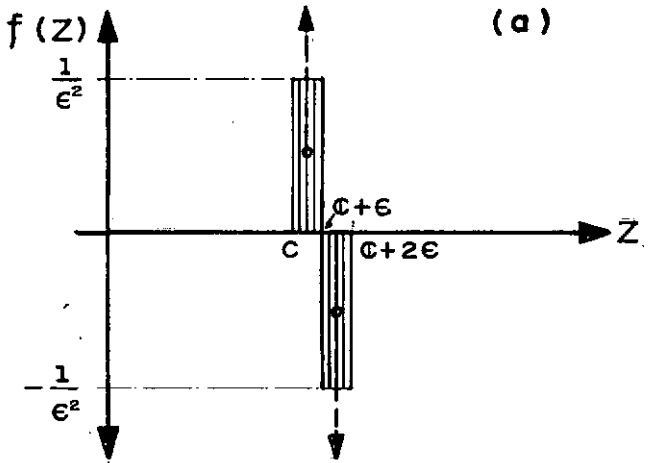


FIG. (A.2) - REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DA FUNÇÃO BINÁRIO UNITÁRIO.

(a) - GERAÇÃO DE FUNÇÃO BINÁRIO, DIMENSIONAL.

(b) - FUNÇÃO BINÁRIO.

(c) - GERAÇÃO DA FUNÇÃO BINÁRIO, ADMENSIONAL.

5. Integral envolvendo a "função" pulso unitário:

$$\int f(x) \cdot \delta(x - c) dx = f(c). \quad (\text{A.5})$$

6. "Função" binário unitário:

$$\eta(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & 0 > x > 2\epsilon \\ \frac{1}{\epsilon^2} & 0 < x < \epsilon \\ -\frac{1}{\epsilon^2} & \epsilon < x < 2\epsilon \end{array} \right\} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \quad (\text{A.6})$$

7. Derivada da "função" pulso unitário:

$$\delta'(x) = \eta(x) \quad (\text{A.7})$$

8. Translação da "função" binário unitário:

$$\eta(x - c) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & c > x > c + 2\epsilon \\ \frac{1}{\epsilon^2} & c < x < c + \epsilon \\ -\frac{1}{\epsilon^2} & c + \epsilon < x < c + 2\epsilon \end{array} \right\} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \quad (\text{A.8})$$

9. Derivada de um produto envolvendo a "função" pulso unitário:

$$\frac{d}{dx} \left[F(x) \cdot \delta(x - c) \right] = F(c) \cdot \delta'(x - c). \quad (\text{A.9})$$

10. Argumento adimensional da "função" pulso unitário:

$$\delta(x - C) = \frac{1}{\ell} \delta^*(x - c) \quad (\text{A.10})$$

onde $x = \frac{X}{\ell}$, $c = \frac{C}{\ell}$

11. Argumento adimensional da "função" binário unitário:

$$\delta'(x - C) = \frac{1}{\ell^2} \delta'^*(x - c) \quad \text{onde } x = \frac{X}{\ell} , \quad c = \frac{C}{\ell} \quad (\text{A.11})$$

APÊNDICE B

TRANSFORMADAS DE LAPLACE USADAS NA SOLUÇÃO DA ELÁSTICA DO ROTOR

A equação diferencial do rotor com disco interme_{di}ário, equação (86) do capítulo V, foi resolvida pela aplicação da Transformada de Laplace. A transformada da equação (87) tem o seguinte aspecto,

$$s^4 \bar{Q} - s^3 Q(0) - s^2 Q'(0) - s Q''(0) - Q'''(0) - \beta^4 \bar{Q} - \bar{\beta}^4 Q(c) e^{-cs} + \alpha(s^2 \bar{Q} - s Q(0) - Q'(0)) + \bar{\alpha} \left. \frac{dQ}{dz} \right|_c s e^{-cs} = 0 \quad (A.12)$$

onde $\bar{Q} = L\{Q\}$

Para obter a equação (A.12) foram usadas as seguintes propriedades:

$$a) \quad L \left\{ \frac{d^4 Q}{dz^4} \right\} = s^4 \bar{Q} - s^3 Q(0) - s^2 Q'(0) - s Q''(0) - Q'''(0) \quad (A.13)$$

$$b) \quad L \{Q \delta(z-c)\} = L \{Q(c) \delta(z-c)\} = Q(c) L \{\delta(z-c)\} = Q(c) e^{-cs} \quad (A.14)$$

$$c) \quad L \left\{ \frac{d^2 Q}{dz^2} \right\} = s^2 \bar{Q} - s Q(0) - Q'(0) \quad (A.15)$$

$$d) \quad L \left\{ \frac{dQ}{dz} \delta'(z-c) \right\} = L \left\{ \frac{dQ}{dz} \right|_c \delta'(z-c) \right\} = \frac{dQ}{dz} \bigg|_c L \{\delta'(z-c)\} = \frac{dQ}{dz} \bigg|_c s e^{-cs} \quad (A.16)$$

Para a transformada inversa de Laplace da equação (91), capítulo V, faz-se uso das expressões abaixo:

$$a) \quad L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + \delta^2} \right\} = \frac{\sinh \delta t}{\delta} \quad (A.17)$$

$$b) \quad L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + \epsilon^2} \right\} = \frac{\sin \epsilon t}{\epsilon} \quad (A.18)$$

$$c) \quad L^{-1}\left\{\frac{S}{S^2 - \delta^2}\right\} = \cosh \delta t \quad (A.19)$$

$$d) \quad L^{-1}\left\{\frac{S}{S^2 + \varepsilon^2}\right\} = \cos \varepsilon t \quad (A.20)$$

$$e) \quad L^{-1}\left\{\frac{S^2}{S^2 - \delta^2}\right\} = L^{-1}\left\{1 + \frac{\delta^2}{S^2 - \delta^2}\right\} = \delta(t) + \delta \sinh \delta t \quad (A.21)$$

$$f) \quad L^{-1}\left\{\frac{S^2}{S^2 + \varepsilon^2}\right\} = L^{-1}\left\{1 - \frac{\varepsilon^2}{S^2 + \varepsilon^2}\right\} = \delta(t) - \varepsilon \sin \varepsilon t \quad (A.22)$$

$$g) \quad L^{-1}\left\{\frac{S^3}{S^2 - \delta^2}\right\} = L^{-1}\left\{S + \frac{\delta^2 S}{S^2 - \delta^2}\right\} = \delta'(t) + \delta^2 \cosh \delta t \quad (A.23)$$

$$h) \quad L^{-1}\left\{\frac{S^3}{S^2 + \varepsilon^2}\right\} = L^{-1}\left\{S - \frac{\varepsilon^2 S}{S^2 + \varepsilon^2}\right\} = \delta'(t) - \varepsilon^2 \cos \varepsilon t \quad (A.24)$$

$$i) \quad L^{-1}\left\{\frac{e^{-cS}}{S^2 - \delta^2}\right\} = \frac{\sinh \delta(t - c)}{\delta} \times u(t - c) \quad (A.25)$$

$$j) \quad L^{-1}\left\{\frac{e^{-cS}}{S^2 + \varepsilon^2}\right\} = \frac{\sin \varepsilon(t - c)}{\varepsilon} \times u(t - c) \quad (A.26)$$

$$l) \quad L^{-1}\left\{\frac{S e^{-cS}}{S^2 - \delta^2}\right\} = \cosh \delta(t - c) \times u(t - c) \quad (A.27)$$

$$m) \quad L^{-1}\left\{\frac{S e^{-cS}}{S^2 + \varepsilon^2}\right\} = \cos \varepsilon(t - c) \times u(t - c) \quad (A.28)$$

Observação:

$\delta(t)$ - função pulso unitário

δ - parâmetro adimensional